இயற்கணிதம்

(ALGEBRA)

ரா. சுந்தரவல்லி

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—331

இயற்கணிதம்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத் திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியை
திருமதி ரா. சுந்தரவல்லி,
கணிதப் பேராசிரியை,
சென்னை மருத்துவக் கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

பொருளடக்கம்

முதல் பாகம்

		பக்கம்
1.	பகுதிப் பின்னங்கள் (Partial Fractions) ...	1
2.	ஈருறுப்புத் தேற்றம்—அளவுக்கிணங்கிய படிகளுக்கு (Binomial Theorem for Rational Index) ...	26
3.	படிக்குறித் தேற்றம் (Exponential Theorem)...	68
4.	மடக்கைத் தொடர் (Logarithmic Series) ...	92
5.	தொடர்களின் கூட்டல் (Summations of Series) ...	122

இரண்டாம் பாகம்

1.	அணிக்கோவை (Determinants) ...	165
2.	சமன்பாட்டுக் கொள்கை (Theory of Equations) ...	217

மூன்றாம் பாகம்

1.	மெய்யெண் தொகுதி (System of Real Numbers) ...	339
2.	கந்தழித் தொடர் முறைகள்—எல்லைகள் (Infinite Sequences—Limits) ...	374
3.	(a) கந்தழித் தொடர்கள்—குவிதல், விரிதல் (Infinite Series—Convergency, Divergency)	398
	(b) ஈருறுப்புத் தேற்றம், படிக்குறித் தேற்றம், மடக்கைத் தேற்றம் — இவற்றின் தெரிப்புகள் (Proof for the Binomial, Exponential and Logarithmic Theorems)	484
4.	எண் கொள்கை (Theory of Numbers) ...	529
	கலைச்சொற்கள் ...	582

முதல் பாகம்

1. பகுதிப் பின்னங்கள்
(Partial Fractions)

1.1. வரையறை

பல்லுறுப்புக் கோவைச் சார்பு (Polynomial function) :

n பூச்சியம் அல்லது ஒரு கூட்டு முழு எண்ணுகவும், $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$ முதலியவை மாறிலிகளாகவும் கொண்ட ஒரு சார்பை

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n$$

என எழுதலாம். இச் சார்பு, x-ன் n படியுடைய விகித முழுச் சார்பு அல்லது x-ன் பல்லுறுப்புச் சேர்க்கைச் சார்பு எனப்படும்.

1.2. அளவுக் கிணங்கிய பின்னம் (Rational Fraction or Function)

P, Q என்பவை பல்லுறுப்புச் சார்புகளானுல், $\frac{P}{Q}$ என்ற ஒரு சார்பே அளவுக் கிணங்கிய சார்பு (அல்லது பின்னம்) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

1.3. அளவுக் கிணங்கிய தகு பின்னம் (Proper Fraction)

$\frac{P}{Q}$ என்ற சார்பில், P-ன் படி Q-ன் படியை விடச் சிறிதாக இருப்பின், அச் சார்பு அளவுக் கிணங்கிய ஒரு தகு பின்னம் எனப்படும்.

அளவுக் கிணங்கிய தகாப் பின்னம் (Improper Fraction) :

$\frac{P}{Q}$ என்ற சார்பில், P-ன் படி Q-ன் படியை விடப் பெரிதாகவோ, அல்லது அதற்குச் சமமாகவோ இருக்குமானுல், அச் சார்பு அளவுக் கிணங்கிய ஒரு தகாப் பின்னம் எனப்படும்.

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பின்னங்களை, ஒரு பின்னத்தோடு கூட்டவோ அல்லது ஒரு பின்னத்திலிருந்து குறைக்கவோ நமக்குத் தெரியும். அப்படிச் செய்வதன்மூலம் நமக்கு ஒரே ஒரு பின்னம் கிடைக்கும். அப் பின்னம் ஒரு தகு பின்னமாகவோ அல்லது ஒரு தகாப் பின்னமாகவோ இருக்கலாம்.

ஆனால் இவ்வத்தியாயத்தில் ஒரு தகு பின்னத்தையோ அல்லது ஒரு தகாப் பின்னத்தையோ இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பின்னங்களாகப் பிரிக்கும் முறையைக் கவனிப்போம். இம் முறையைத்தான் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்தல் (Resolution or splitting into partial fractions) என்கிறோம்.

விளக்கம் :

$\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$ ஐச் சுருக்கி $\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}$ என எழுதலாம். இதற்குப் பதிலாக $\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}$ நமக்குக் கொடுக்கப்படுமேயானால் இச்சார்பை நாம் $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$ எனப் பிரித்து எழுதலாம். இவ்விதமாகப் பிரித்து எழுதும் முறை பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்து எழுதுதல் எனப்படும்.

1·4. தேற்றம்

$L+\dfrac{M}{N}\equiv L_1+\dfrac{M_1}{N_1}$ ஆனால், L-உம், L_1-உம் பல்லுறுப்புச் சேர்க்கைக் கோவைச் சார்புகள். $\dfrac{M}{N}$, $\dfrac{M_1}{N_1}$ தகு பின்னங்கள் என்றால் $L\equiv L_1$, $\dfrac{M}{N}\equiv\dfrac{M_1}{N_1}$ என நிரூபிக்கலாம்.

தெரிப்பு :

$$L+\frac{M}{N}\equiv L_1+\frac{M_1}{N_1} \text{ (கொடுக்கப்பட்டது)}$$

$$L-L_1\equiv\frac{M_1}{N_1}-\frac{M}{N}$$

$$\equiv\frac{M_1N-MN_1}{NN_1}$$

$L-L_1$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புச் சேர்க்கைக் கோவைச் சார்பாகும். மேலும், $\frac{M_1}{N_1} - \frac{M}{N}$ என்பது ஒரு தகு பின்னமாகும். ஏனெனில், NN_1-ன் படி, M_1N-ன் படியையும், MN_1-ன் படியையும் விட உயர்ந்தது. எனவே இடக் கைப்புறம் உள்ள $(L-L_1)$ என்ற ஒரு பல்லுறுப்புச் சேர்க்கைச் சார்பு, வலக் கைப் புறம் உள்ள $\frac{M_1}{N_1} - \frac{M}{N}$ என்ற ஒரு தகு பின்னத்திற்குச் சமமாகாது. ஆகவே, $L \equiv L_1$ எனவும், $\frac{M}{N} \equiv \frac{M_1}{N_1}$ எனவும் நிறுவப்படுகிறது.

1·5. இப்பகுதியில், பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்து எழுதும் செய்முறையை ஆராய்வோம்.

(i) $\frac{f(x)}{F(x)}$-ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவேண்டும் என்று வைத்துக் கொள்வோம். $f(x)$-உம் $F(x)$-உம் பல்லுறுப்புக் கோவைகள். $f(x)$-இன் படி, $F(x)$-ன் படியை விடக் குறைவாக இருக்குமானால், $\frac{f(x)}{F(x)}$ ஒரு தகு பின்னமாகும். எனவே, நாம் இத்தகு பின்னத்தைப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவேண்டும்.

(ii) $\frac{f(x)}{F(x)}$-ல், $f(x)$-ன் படியானது $F(x)$-ன் படியை விடப் பெரியதாக இருக்குமானால், $\frac{f(x)}{F(x)}$ ஒரு தகாப் பின்னமாகும். எனவே, $f(x)$-ஐ, $F(x)$-ஆல் வகுக்க வேண்டும். $Q(x)$ என்ற ஈவும், $R(x)$ என்ற மீதியும் வரும். அதாவது,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{F(x)}$$

$Q(x)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை. $\frac{R(x)}{F(x)}$ ஒரு தகு பின்னமாகும். பின்பு $\frac{R(x)}{F(x)}$-ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்க வேண்டும்.

(iii) $\frac{f(x)}{F(x)}$-ல், $f(x)$-ன் படியும் $F(x)$-ன் படியும் சமமாக இருப்பின் $f(x)$-ஐ, $F(x)$-ஆல் வகுக்கும்போது ஈவு ஒரு மாறிலியாக வரும்.

அதாவது,

$$\frac{f(x)}{F(x)} \equiv A + \frac{R(x)}{F(x)}$$ என்ற முற்றொருமை கிடைக்கும் $\frac{R(x)}{F(x)}$ என்ற தகு பின்னத்தை நாம் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்க வேண்டும்.

விளக்கம் :

(i) $\frac{6x^2+5x-2}{2x^3-x^2-x}$ என்பது ஒரு தகு பின்னமாகும். இதை $\frac{2}{x}+\frac{3}{x-1}-\frac{4}{2x+1}$ எனப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்து எழுதலாம்.

(ii) $\frac{2x^3-3x^2-8x-26}{2x^2-5x-12}$ என்பதை எடுத்துக் கொண்டால் $f(x)=2x^3-3x^2-8x-26$-ன் படியானது $F(x)=2x^2-5x-12$-ன் படியை விடப் பெரியது. எனவே நாம் முதலில் $2x^3-3x^2-8x-26$-ஐ $2x^2-5x-12$-ஆல் வகுக்க வேண்டும்.

$$\frac{2x^3-3x^2-8x-26}{2x^2-5x-12} = (x+1)+\frac{9x-14}{2x^2-5x-12}$$

$Q(x)=(x+1)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புச் சார்பாகும்.

$\frac{R(x)}{F(x)} = \frac{9x-14}{2x^2-5x-12}$ ஒரு தகு பின்னமாகும்.

இதையே நாம் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்க வேண்டும்.

(iii) $\frac{x^2+6x+6}{x^2+5x+6}$ என்பதில் $f(x)=x^2+6x+6$, $F(x)=x^2+5x+6$. $f(x)$-ன் படியும் $F(x)$-ன் படியும் சமமாக இருப்பதால் (x^2+6x+6)-ஐ (x^2+5x+6)-ஆல் வகுக்க வேண்டும்.

எனவே $\frac{x^2+6x+6}{x^2+5x+6} = 1+\frac{x}{x^2+5x+6}$ ஆகும். இங்கு $Q(x)=1$ (ஒரு மாறிலி). $\frac{R(x)}{F(x)} = \frac{x}{x^2+5x+6}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவேண்டும்.

எனவே, அளவுக் கிணங்கிய ஒரு பின்னம் அல்லது சார்பைப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கும் முன்பு, அதன் மேல் கோவையின் படி, கீழ்க் கோவையின் படியை விடச் சிறியதாக இருக்கிறதா

என்று கவனிக்கவேண்டும். அப்படி இல்லாவிடில், மேல் கோவையைக் கீழ்க் கோவையால் வகுத்து மீதியாக வரும் கோவையின் படி கீழ்க் கோவையின் படியை விடக் குறைவாக வரும் வரை வகுத்து, இப்படிக் கிடைக்கும் தகு பின்னத்தைப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்க வேண்டும்.

1.6.1. $F(x)$, x-ன் முதற்படிக் காரணிகளைக் (Linear factors) கொண்டதாக இருப்பின், $\frac{f(x)}{F(x)}$ என்ற பின்னத்தைப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கும்போது $F(x)$-ன் ஒவ்வொரு காரணிக்கும் ஒவ்வொரு பின்னம் வரும்.

$$F(x) \equiv (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)\ldots(a_rx+b_r)$$

என்று எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே,

$$\frac{f(x)}{F(x)} \equiv \frac{A_1}{(a_1x+b_1)}+\frac{A_2}{(a_2x+b_2)}+\frac{A_3}{(a_3x+b_3)}+\ldots+\frac{A_r}{(a_rx+b_r)}$$

எனப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்து எழுதலாம். இந்த முற்றொருமையில் $A_1, A_2, A_3, \ldots A_r$ என்பன மாறிலிகள். இவைகளைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

இரண்டு பக்கங்களையும் (a_1x+b_1)-ஆல் பெருக்கவேண்டும்.

$$\frac{f(x)}{F(x)}\times(a_1x+b_1) \equiv \frac{A_1}{(a_1x+b_1)}\times(a_1x+b_1)$$
$$+\frac{A_2}{(a_2x+b_2)}\times(a_1x+b_1)+\frac{A_3}{(a_3x+b_3)}\times(a_1x+b_1)$$
$$+\ldots\ldots+\frac{A_r}{(a_rx+b_r)}\times(a_1x+b_1)$$

$$\therefore \frac{f(x)}{F(x)}\times(a_1x+b_1) \equiv A_1+\frac{A_2}{(a_2x+b_2)}\times(a_1x+b_1)$$
$$+\frac{A_3}{(a_3x+b_3)}\times(a_1x+b_1)+\ldots\ldots+\frac{A_r}{(a_rx+b_r)}\times(a_1x+b_1)$$

$$\frac{f(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)\ldots\ldots(a_rx+b_r)}\times(a_1x+b_1)$$
$$\equiv A_1+\frac{A_2}{(a_2x+b_2)}\times(a_1x+b_1)+\frac{A_3}{(a_3x+b_3)}\times(a_1x+b_1).$$
$$+\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$x=-\frac{b_1}{a_1}$ என்று ஈடு செய்க.

$$\frac{f\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)}{\left[a_2\cdot\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)+b_2\right]\left[a_3\cdot\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)+b_3\right]\cdots\left[a_r\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)+b_r\right]}$$

$$\equiv A_1+\frac{A_2}{a_2\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)+b_2}\times\left(a_1\cdot-\frac{b_1}{a_1}+b_1\right)$$

$$+\frac{A_3}{a_3\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)+b_3}\left(a_1\cdot-\frac{b_1}{a_1}+b_1\right)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{A_r}{a_r\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)+b_n}\left(a_1-\frac{b_1}{a_1}+b_1\right).$$

$$\therefore\ \frac{f\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)}{\left(a_2\cdot-\frac{b_1}{a_1}+b_2\right)\left(a_3\cdot-\frac{b_1}{a_1}+b_3\right)\cdots\left(a_r\cdot-\frac{b_1}{a_1}+b_r\right)}$$

$$\equiv A_1+\frac{A_2(0)}{\left(-\frac{a_2b_1}{a_1}+b_2\right)}+\frac{A_3(0)}{\left(-\frac{a_3b_1}{a_1}+b_3\right)}\cdots\cdots$$

$$+\frac{A_r(0)}{\left(-\frac{a_rb_1}{a_1}+b_r\right)}.$$

$$\therefore\ A_1=\frac{f\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)}{\left(-\frac{a_2b_1}{a_1}+b_2\right)\left(-\frac{a_3b_1}{a_1}+b_3\right)\cdots\left(-\frac{a_rb_1}{a_1}+b_r\right)}.$$

இவ்விதமாகவே நாம் ஒவ்வொன்றுகப் பகுதிப் பின்னங்களின் மாறிலிகளை A_2, A_3, ..., ..., A_r கண்டுபிடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$-ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்.

முதல் வழி :

$$f(x) = x^2+x+1;\; F(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

மேல்கோவையின் படி கீழ்க்கோவையின் படியை விடக் குறைவாக இருப்பதால் வகுக்கவேண்டிய தேவையில்லை. ஏனெனில் $\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ என்பது ஒரு தகு பின்னம் ஆகும். $F(x)$-க்கு மூன்று காரணிகள் இருப்பதால் கொடுக்கப்பட்ட தகு பின்னத்தை மூன்று பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கலாம்.

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

இரண்டு பக்கங்களையும் $(x-1)$-ஆல் பெருக்கி $x=1$ என ஈடு செய்தால்,

$$\frac{x^2+x+1}{(x-2)(x-3)} = A + \frac{B}{(x-2)}(x-1) + \frac{C}{(x-3)}(x-1)$$

$$\frac{(1)^2+1+1}{(1-2)(1-3)} = A$$

$$\therefore\; A = \frac{3}{2}$$

இரண்டு பக்கங்களையும் $(x-2)$-ஆல் பெருக்கி $x=2$ என ஈடு செய்தால்,

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)}(x-2) + B + \frac{C}{(x-3)}(x-2)$$

$$\frac{(2)^2+2+1}{(2-1)(2-3)} = B$$

$$\therefore\; B = -7.$$

இதே போல் இரண்டு பக்கங்களையும் $(x-3)$-ஆல் பெருக்கி $x=3$ என ஈடு செய்வோமானால் நமக்கு C-ன் மதிப்புக் கிடைக்கும்.

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)}(x-3) + \frac{B}{(x-2)}(x-3) + C.$$

$$\frac{(3)^2+3+1}{(3-1)(3-2)} = C \qquad \because\; C = \frac{13}{2}$$

எனவே,

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)} - \frac{7}{(x-2)} + \frac{13}{2}\cdot\frac{1}{(x-3)}$$

இரண்டாவது வழி :

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

$$x^2+x+1 \equiv A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

$$x^2+x+1 \equiv A(x^2-5x+6) + B(x^2-4x+3) + C(x^2-3x+2)$$
$$\equiv x^2(A+B+C) + x(-5A-4B-3C) + (6A+3B+2C).$$

இரு புறங்களிலும் சமபடிக் கெழுக்களைச் சமன் செய்தால்,

$$A+B+C = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$
$$-5A-4B-3C = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$
$$6A+3B+2C = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளின் தீர்வு

$$A = \frac{3}{2}, \quad B = -7; \quad C = \frac{13}{2}.$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தகு பின்னத்தின் பகுதிப் பின்னங்கள்

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)} - \frac{7}{(x-2)} + \frac{13}{2}\cdot\frac{1}{(x-3)}$$

மூன்றாவது வழி :

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

$(x-1)(x-2)(x-3)$-ஆல் இரண்டு புறங்களையும் பெருக்குவோமானல்,

$$x^2+x+1 \equiv A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x-2)$$

$$x^2+x+1 \equiv x^2(A+B+C)+x(-5A-4B-3C) + (6A+3B+2C).$$

x-க்கு ஏதாகிலும் மதிப்பைக் கொடுத்து ஈடு செய்வோமானால் நமக்கு மூன்று சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

$x=-2$ என்று ஈடு செய்தால்,

$$(-2)^2+(-2)+1=(-2)^2(A+B+C) + (-2)(-5A-4B-3C)+6A+3B+2C.$$

$$4-2+1=20A+15B+12C$$

$$3=20A+15B+12C \qquad \ldots \quad \ldots \qquad (1)$$

$x=-1$ என்று ஈடு செய்தால்,

$$(-1)^2+(-1)+1=(-1)^2(A+B+C) + (-1)(-5A-4B-3C)+(6A+3B+2C)$$

$$1-1+1=12A+8B+6C$$

$$1=12A+8B+6C \qquad \ldots \quad \ldots \qquad (2)$$

$x=0$ என்று ஈடு செய்தால்,

$$1=6A+3B+2C \qquad \ldots \quad \ldots \qquad (3)$$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து A, B, C ஆகியவைகளின் தீர்வு காண $A=\frac{3}{2}$, $B=-7$, $C=\frac{13}{2}$ என வரும்.

எனவே,

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)} - \frac{7}{(x-2)} + \frac{13}{2}\cdot\frac{1}{(x-3)}.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.

$\dfrac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்க.

மேல் கோவையின் படி கீழ்க் கோவையின் படியை விடக் குறைவாக இருப்பதால், கொடுக்கப்பட்டுள்ள பின்னம் ஒரு தகு பின்னமேயாகும்.

எனவே,

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)} = \frac{A}{(1-ax)} + \frac{B}{(1-bx)} + \frac{C}{(1-cx)}$$

நாம் முதல் வழியையே கையாண்டால், $(1-ax)$-ஆல் இரண்டு பக்கங்களையும் பெருக்கி $x = \frac{1}{a}$ என ஈடு செய்தால்,

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} = A.$$

அதேபோல் $(1-bx)$-ஆல் இரண்டு பக்கங்களையும் பெருக்கி $x = \frac{1}{b}$ என்று ஈடு செய்தால்,

$$\frac{b^2}{(b-a)(b-c)} = B.$$

$(1-cx)$-ஆல் இரண்டு பக்கங்களையும் பெருக்கி $x = \frac{1}{c}$ என ஈடு செய்தால்,

$$\frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = C.$$

என A, B, C-ன் மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

$$\therefore \frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} \cdot \frac{1}{(1-ax)}$$

$$+ \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} \cdot \frac{1}{(1-bx)}$$

$$+ \frac{c^2}{(c-a)(c-x)} \cdot \frac{1}{(1-cx)}$$

1·7. II. $F(x) = (ax+b)^p \ (a_{p+1}\ x + b_{p+1}) \ldots\ldots \ (a_n\ x + b_n)$ என இருந்தால்,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots\ldots + \frac{A_p}{(ax+b)^p}$$

$$+ \frac{A_{p+1}}{(a_{p+1}\ x + b_{p+1})} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{(a_n x + b_n)}$$

என எடுத்துக் கொண்டு மேற் கூறிய ஏதாகிலும் ஒரு வழியில் $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ ஆகிய அம்மாறிலிகளின் மதிப்பைக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$\frac{2x^2+5}{(x-1)^2(x-3)}$-ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்.

முதல் வழி :

$$\frac{2x^2+5}{(x-1)^2(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-3)}$$

இரண்டு பக்கங்களையும் $(x-1)^2$-ஆல் பெருக்கி, $x = 1$ என ஈடு செய்தால்,

$$B = \frac{2(1)^2+5}{(1-3)} = -\frac{7}{2}.$$

$(x-3)$-ஆல் இரண்டு பக்கங்களையும் பெருக்கி, $x=3$ என ஈடு செய்ய,

$$C = \frac{2(3)^2+5}{(3-1)^2} = \frac{23}{4}$$

இரண்டு பக்கங்களையும் $(x-1)^2(x-3)$-ஆல் பெருக்கினுல்,

$$\begin{aligned} 2x^2+5 &\equiv A(x-1)(x-3) + B(x-3) + C(x-1)^2 \\ &\equiv x^2(A+C) + x(-4A+B-2C) \\ &\quad + (3A-3B+C). \end{aligned}$$

$x = 0$ என்று ஈடு செய்ய,

$$3A - 3B + C = 5.$$

இதில் $B = -\frac{7}{2}$, $C = \frac{23}{4}$ என ஈடு செய்தால்,

$$A = -\frac{15}{4} \text{ என வரும்.}$$

$$\therefore \frac{2x^2+5}{(x-1)^2(x-3)} = -\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)} - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{23}{4}\cdot\frac{1}{(x-3)}.$$

இரண்டாவது வழி :

$\frac{2x^2+5}{(x-1)^2(x-3)}$ -ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்.

$$\frac{2x^2+5}{(x-1)^2(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-3)}$$

இரண்டு பக்கங்களையும் $(x-1)^2(x-3)$ ஆல் பெருக்கினால்,

$$2x^2+5 \equiv A(x-1)(x-3) + B(x-3) + C(x-1)^2$$

$$2x^2+5 \equiv x^2(A+C) + x(-4A+B-2C) + (3A-3B+C)$$

இரண்டு பக்கங்களிலும் சம படிகளின் கெழுவைச் சமன் செய்தால்

$A + C = 2$ ... ... (1)

$-4A + B - 2C = 0$ ... ... (2)

$3A - 3B + C = 5$ ... ... (3)

இம் மூன்று சமன்பாடுகளின் தீர்வு

$$A = -\frac{15}{4},\ B = -\frac{7}{2},\ C = \frac{23}{4}$$

$$\therefore \frac{2x^2+5}{(x-1)^2(x-3)} = -\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)} - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{23}{4}\cdot\frac{1}{(x-3)}.$$

வேறு வழி :

$x-1 = y$ என ஈடு செய்க.

$\therefore\ x = y+1.$

$$\therefore \frac{2x^2+5}{(x-1)^2(x-3)} = \frac{2(y+1)^2+5}{y^2(y+1-3)} = \frac{7+4y+2y^2}{y^2(y-2)}$$

$$-2+y)\ 7 + 4y + 2y^2\ (-\frac{7}{2} - \frac{15}{4}y$$

$$7 - \frac{7y}{2}$$

$$\frac{15y}{2} + 2y^2$$

$$\frac{15y}{2} - \frac{15}{4}y^2$$

$$\frac{23}{4}y^2$$

$$\therefore\ \frac{2x^2+5}{(x-1)^2(x-3)} = \frac{7+4y+2y^2}{y^2(y-2)}$$

$$= \frac{1}{y^2}\left[\left(-\frac{7}{2} - \frac{15}{4}y\right) + \frac{\frac{23}{4}y^2}{(y-2)}\right]$$

$$= -\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{y^2} - \frac{15}{4}\cdot\frac{1}{y} + \frac{23}{4}\cdot\frac{1}{(y-2)}$$

$$\therefore\ \frac{2x^2+5}{(x-1)^2(x-3)} = -\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{15}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)} + \frac{23}{4}\cdot\frac{1}{(x-3)}.$$

எடுத்துக்காட்டு 4. $\frac{x^4-5x^3+10x^2-8x-1}{(x-1)^3(x-2)}$-ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்.

மேல் கோவையும், கீழ்க்கோவையும் சம படியாக இருப்பதால் வகுக்க வேண்டும். வகுத்து வரும் ஈவு ஒரு மாறிலியாக இருக்கும்.

$$\therefore\ \frac{x^4-5x^3+10x^2-8x-1}{(x-1)^3(x-2)} = 1 + \frac{x^2-x-3}{(x-1)^3(x-2)}$$

$\frac{x^2-x-3}{(x-1)^3(x-2)}$-ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவேண்டும்.

$$\frac{x^2-x-3}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$(x-1)^3\ (x-2)$-ஆல் இரண்டு பக்கங்களையும் பெருக்கினால்,

$$x^2 - x - 3 \equiv A(x-1)^3 + B(x-1)^2(x-2) + C(x-1)(x-1) + D(x-2).$$

$$x^2 - x - 3 \equiv x^3(A+B) + x^2(-3A-4B+C) + x(3A+5B-3C+D) + (-A-2B+2C-2D).$$

முதல் வழியின் மூலம் நாம் A, D-ன் மதிப்புகளைக் கண்டு பிடிக்கலாம். இரண்டாவது அல்லது மூன்றாவது வழியின் மூலம் B, C-ன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம்

(1)-ஐ இரு புறங்களையும் $(x-2)$-ஆல் பெருக்கி $x=2$ என ஈடு செய்தால்

$$A = \frac{4-2-3}{1} = -1$$

அதேபோல் $(x-1)^3$-ஆல் இரு புறங்களையும் பெருக்கி $x=1$ என ஈடு செய்ய,

$$D = \frac{1-1-3}{-1} = 3$$

இரு புறங்களிலும் சமபடி கெழுக்களைச் சமன் செய்தால்

$$A + B = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$-3A - 4B + C = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளில் $A=-1$, $D=3$ என ஈடு செய்தால் $B=1$, $C=2$ என வரும். எனவே கொடுக்கப்பட்ட தகு பின்னம்

$$\frac{x^4-5x^3+10x^2-8x+1}{(x-1)^3(x-2)} = 1 - \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}.$$

குறிப்பு:

$$\frac{x^4-5x^3+10x^2-8x-1}{(x-1)^3(x-2)} = a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{e}{(x-1)^3}$$ எனவும் கொண்டு a, b, c, d, e-ன் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

1·8. III. $F(x) = (ax^2 + bx + c)(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots$ ... என இருக்குமானால், $ax^2 + bx + c$-ல் $b^2 - 4ac > 0$ என்றால் அவற்றின் மெய்க் காரணிகளைக் காணலாம். $b^2 - 4ac < 0$ என்று இருக்குமானால் $ax^2 + bx + c$-ன் மூலங்கள் அளவுக்கிணங்காதபடி இருக்கும். எனவே, $ax^2 + bx + c$-ன் மெய்க் காரணிகளைக் காண இயலாது. அச் சமயத்தில்,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{A_1}{(a_1x+b_1)} + \frac{A_2}{(a_2x+b_2)} + \cdots$$

என எடுத்துக் கொண்டு A, B, A_1 A_2 ... ... ஆகியவற்றைக் கண்டு பிடிக்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$\dfrac{2x^2-11x+5}{(x-3)(x^2+2x-5)}$-ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்.

$$\frac{2x^2-11x+5}{(x-3)(x^2+2x-5)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{Bx+C}{x^2+2x-5}$$

இரு புறங்களையும் $(x-3)(x^2+2x-5)$ ஆல் பெருக்கிச் சமபடி கெழுக்களைச் சமன் செய்தால்,

$$2x^2-11x+5 \equiv A(x^2+2x-5)+(Bx+C)(x-3).$$
$$\equiv x^2(A+B)+x(2A-3B+C)+(-5A-3C).$$

$$\therefore \quad A+B = 2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$
$$2A-3B+C = -11 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$
$$-5A-3C = 5 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளின் தீர்வு,

$$A = -1, \; B = 3, \; C = 0$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட பின்னம்,

$$\frac{2x^2-11x+5}{(x-3)(x^2+2x-5)} = \frac{-1}{(x-3)} + \frac{3x}{(x^2+2x-5)}.$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$\dfrac{1}{x^4+1}$ -ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்க.

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

$$\therefore \frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} \equiv \frac{Ax+B}{(x^2+\sqrt{2}x+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

$(x^2+\sqrt{2}x+1)\ (x^2-\sqrt{2}x+1)$-ஆல் இருபுறங்களேயும் பெருக்கிச் சமபடி கெழுக்களைச் சமன் செய்தால்,

$$1 \equiv x^3(A+C) + x^2(B-\sqrt{2}A+D+\sqrt{2}C) + x(A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D) + (B+D)$$

$$\therefore\ A+C = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

$$B+D+\sqrt{2}(C-A) = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

$$A+C+\sqrt{2}(D-B) = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

$$B+D = 1 \quad \ldots \quad (4)$$

இச்சமன்பாடுகளின் தீர்வு :

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}};\quad B = \frac{1}{2};\quad D = \frac{1}{2};\quad C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$\dfrac{2x^4+7x^3+5x^2+5x+3}{(x^2+3x+1)(x^3+3x^2+2)}$-ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்க.

$$\frac{2x^4+7x^3+5x^2+5x+3}{(x^2+3x+1)(x^3+3x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+3x+1} + \frac{Cx^2+Dx+E}{x^3+3x^2+2}$$

இரண்டு புறங்களையும் $(x^2+3x+1)\ (x^3+3x^2+2)$ ஆல் பெருக்கினுல்

$$\begin{aligned}2x^4+7x^3+5x^2+5x+3 &\equiv (Ax+B)(x^3+3x^2+2) + (Cx^2+Dx+E)(x^2+3x+1)\\ &= x^4(A+C) + x^3(3A+B+3C+D)\\ &\quad + x^2(3B+C+3D+E) + (2A+D+3E)x\\ &\quad + (2B+E)\end{aligned}$$

சம படிக் கெழுக்களைச் சமன்செய்து தீர்வு கண்டால்

$$A + C = 2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$3A + B + 3C + D = 7 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$3B + C + 3D + E = 5 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$2A + D + 3E = 5 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$$2B + E = 3 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

இச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு,

$A = B = C = E = 1;\quad D = 0$ ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட பின்னம்,

$$\frac{2x^4+7x^3+5x^2+5x+3}{(x^2+3x+1)(x^3+3x^2+2)} \equiv \frac{x+1}{x^2+3x+1} + \frac{x^2+1}{x^3+3x^2+2}$$

1·4. IV. $F(x) = (ax^2+bx+c)^2\,(a_1 x+b_1)\,(a_2 x+b_2)$ ... என இருக்குமானல்,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)} + \frac{Ex+D}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{A_1}{(a_1 x+b_1)} + \quad \ldots \quad \ldots \text{ என்று}$$

பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்து எழுதிக்கொண்டு A, B, E, D, A_1 ... என்ற மாறிலிகளைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 8:

$\dfrac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்.

$$\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+x+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}$$

$\therefore\ (x^2+x+1)^2$ ஆல் இரு புறங்களையும் பெருக்கினல்,

$$x^2+1 \equiv (Ax+B)(x^2+x+1) + (Cx+D)$$

$$\therefore\ x^2+1 = Ax^3+x^2(A+B) + x(A+B+C) + (B+D)$$

சமபடிக் கெழுக்களை இரண்டு பக்கங்களிலும் சமன்செய்வதால்

$$A = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$A + B = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$A + B + C = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$B + D = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

இந்த நான்கு சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண

$A=0,\ B=1\quad C=-1,\ D=0$ ஆகும்.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட பின்னத்தின் பகுதிப் பின்னங்கள்

$$\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{x}{(x^2+x+1)^2} \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$\dfrac{x^2-3x+2}{(x^2+x+1)^2\,(x+1)^2}$ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்.

$$\frac{x^2-3x+2}{(x^2+x+1)^2\,(x+1)^2} \equiv \frac{Ax+B}{(x^2+x+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2} + \frac{E}{(x+1)} + \frac{F}{(x+1)^2}$$

$$\therefore (x^2-3x+2) \equiv (Ax+B)(x^2+x+1)(x+1)^2 + (Cx+D)(x+1)^2 + E(x^2+x+1)^2(x+1) + F(x^2+x+1)^2$$

$$\begin{aligned} x^2-3x+2 \equiv\ & x^5(A+E) + x^4(3A+B+3E+F) \\ & + x^3(3A+3B+C+5E+2F) \\ & + x^2(3A+4B+2C+D+5E+3F) \\ & + x(A+3B+2D+C+3E+2F) \\ & + (B+D+E+F) \end{aligned}$$

இரு பக்கங்களிலும் சமபடிக் கெழுக்களைச் சமன்செய்தால்

$$A + E = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$3A+B+3E+F = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$3A+3B+C+5E+2F = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$3A+4B+2C+D+5E+3F=1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$$A+3B+2D+C+3E+2F=-3 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

$$B+D+E+F=2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

இச் சமன்பாடுகளைத் தீர்வுகாண,

$A=1$, $B=-2$, $C=3$, $D=-1$, $E=-1$, $F=2$ ஆகின்றன.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட பின்னம்

$$\frac{x^2-3x+2}{(x^2+x+1)^2(x+1)^2}=\frac{x-2}{(x^2+x+1)}+\frac{3x-1}{(x^2+x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)}+\frac{2}{(x+1)^2}$$

எனப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$ ஆனால் $\dfrac{x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும். அதையொட்டி,

$$\sum\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)}=0 \text{ என்று காட்டுக.}$$

$$\frac{x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x-b)}+\frac{C}{(x-c)}$$

என்று எடுத்துக்கொள்.

$$\therefore x^2=A(x-b)(x-c)+B(x-a)(x-c)+C(x-a)(x-b)$$

$x=a$ என்று ஈடு செய்ய, $A=\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}$

$x=b$ என்று ஈடு செய்ய, $B=\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}$

$x=c$ என்று ஈடு செய்ய, $C=\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} \cdot \frac{1}{(x-a)}$$

$$+ \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} \cdot \frac{1}{(x-b)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \cdot \frac{1}{(x-c)}$$

$x = d$ என ஈடு செய்தால்,

$$\frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} \cdot \frac{1}{(d-a)}$$

$$+ \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} \cdot \frac{1}{(d-b)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \cdot \frac{1}{(d-c)}$$

$$\therefore \sum_{a,b,c,d} \frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)} = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 11:

$L(x+2)^3 + M(x+3)^2 = 1$ என்ற சமன்பாட்டிற்கேற்ப L, M-ஐக் கண்டுபிடி. இதையொட்டி $\frac{1}{(x+2)^3\,(x+3)^2}$ - ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரி.

$$L = Ax + B$$

$M = Cx^2 + Dx + E$ என எடுத்துக்கொண்டால்

$$L(x+2)^3 + M(x+3)^2 \equiv (Ax+B)(x+2)^3$$
$$(Cx^2+Dx+E)(x+3)^2$$
$$= 1.$$

$$\therefore \quad (Ax+B)(x^3+6x^2+12x+8) + (Cx^2+Dx+E)(x^2+6x+9) = 1.$$

சம படிக் கெழுக்களை இரண்டு பக்கங்களிலும் சமன்செய்தால்

$$A + C = 0.$$
$$6A + B + 6C + D = 0.$$
$$12A + 6B + 9C + 6D + E = 0.$$
$$8A + 12B + 9D + 6E = 0.$$
$$8B + 9E = 1.$$

இச்சமன்பாடுகளைத் தீர்வு கண்டால்

$A = -3,\ B = -10,\ C = 3,\ D = 10,\ E = 9$ ஆகும்.

$\therefore \quad L = -3x - 10.$

$M = 3x^2 + 10x + 9.$

$L(x+2)^3 + M(x+3)^2 = 1.$

இரண்டு பக்கங்களையும் $(x+2)^3(x+3)^2$ஆல் வகுத்தால்

$$\frac{L}{(x+3)^2} + \frac{M}{(x+2)^3} = \frac{1}{(x+2)^3(x+3)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(x+3)^2(x+2)^3} = \frac{-(3x+10)}{(x+3)^2} + \frac{(3x^2+10x+9)}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{-3(x+3)-1}{(x+3)^2} + \frac{3(x+2)^2 - 2(x+2) + 1}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{-3}{(x+3)} - \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{3}{(x+2)}$$

$$- \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^3}$$

எனவே, $\dfrac{1}{(x+3)^2(x+2)^3}$-ன் பகுதிப் பின்னங்கள்

$$\frac{-3}{(x+3)} - \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{3}{(x+2)} - \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^3}$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 12 :

$\dfrac{x^4}{(x-a)(x-b)(x-c)}$-ஐத் தகுபின்னமாக்கி, அதன் பகுதிப் பின்னங்களைக் கண்டுபிடி. அதையொட்டி,

$\Sigma \dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}$-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

$$\frac{x^4}{(x-a)(x-b)(x-c)} = (x+A) + \frac{B}{(x-a)} + \frac{C}{(x-b)} + \frac{D}{(x-c)}$$

$$\therefore\quad x^4 = (x+A)(x-a)(x-b)(x-c) + B(x-b)(x-c) + C(x-a)(x-c) + D(x-a)(x-b)$$

$x = a$ என ஈடு செய்ய,

$$a^4 = B(a-b)(a-c).$$

$$\therefore\quad B = \frac{a^4}{(a-b)(a-c)}$$

அதே போல், முறையே $x = b$, $x = c$ என ஈடு செய்ய,

$$C = \frac{b^4}{(b-a)(b-c)}$$

$$D = \frac{c^4}{(c-a)(c-b)}$$ ஆகும்.

x^3–ன் கெழுவை இருபுறங்களிலும் சமன் செய்தால்.

$$A - (a+b+c) = 0$$

$$\therefore\quad A = (a+b+c)$$

$$\therefore\quad \frac{x^4}{(x-a)(x-b)(x-c)} = x + (a+b+c) + \sum_{a,b,c} \frac{a^4}{(a-b)(a-c)} \cdot \frac{1}{(x-a)}$$

$x = d$ ஆனால்,

$$\frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)} = (a+b+c+d) + \sum_{a,b,c} \frac{a^4}{(a-b)(a-c)(d-a)}$$

$$\therefore\quad \sum_{a,b,c} \frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} = (a+b+c+d) - \left[\frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-d)}\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 13 :

$$\frac{1}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(cx+d)}$$ ஆனால்,

$$\frac{1}{(ax+b)^3(cx+d)} = \frac{A}{(ax+b)^3} + \frac{AB}{(ax+b)^2} + \frac{AB^2}{(ax+b)}$$

$$+ \frac{B^3}{(cx+d)}$$ என்று காட்டு.

$$\frac{1}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(cx+d)}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{1}{(ax+b)}\left[\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}\right]$$

$$= \frac{A}{(ax+b)^2} + B\left[\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}\right]$$

$$= \frac{A}{(ax+b)^2} + B\left[\frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(cx+d)}\right]$$

$$\frac{1}{(ax+b)^3(cx+d)} = \frac{A}{(ax+b)^3} + \frac{AB}{(ax+b)^2} + \frac{B^2}{(ax+b)(cx+d)}$$

$$= \frac{A}{(ax+b)^3} + \frac{AB}{(ax+b)^2} + B^2\left[\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}\right]$$

$$= \frac{A}{(ax+b)^3} + \frac{AB}{(ax+b)^2} + \frac{AB^2}{(ax+b)} + \frac{B^3}{(cx+d)}.$$

பயிற்சி 1

பின்வருவனவற்றைப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்.

1. $\frac{2x+5}{(x-1)(x-2)}$

2. $\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}$

3. $\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$

4. $\frac{7-19x}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

5. $\frac{3x-2}{(x-1)(2x+1)(x+2)}$

6. $\frac{7x-4}{(x^2-1)(x^2+5x+6)}$

7. $\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

8. $\dfrac{x^2}{(1+2x)(1+3x)}$

9. $\dfrac{2x^2+5}{(x-1)^2(x-3)}$

10. $\dfrac{1}{(1+x)^3(1-x)}$

11. $\dfrac{1}{x^3(x+2)}$

12. $\dfrac{3-2x-x^2}{(1+x)(1-2x-3x^2)}$

13. $\dfrac{1-x-x^2}{(1-2x)(1-x)^2}$

14. $\dfrac{1}{(1-2x)^2(1-3x)}$

15. $\dfrac{x^3-5}{(x-1)^3(x-2)}$

16. $\dfrac{2x^3-3x^2+4x-5}{(1-x)^4}$

17. $\dfrac{(2x-3)(1-5x)(6x+1)}{(4x-1)^3}$

18. $\dfrac{x-1}{(1-x)^2(1+x^2)}$

19. $\dfrac{1}{(x^2+1)^2(x-3)}$

20. $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$

21. $\dfrac{5x^2-3x+4}{(x+1)(x^2-2x+6)}$

22. $\dfrac{2x-1}{(x-1)(x^2+1)}$

23. $\dfrac{x^3+x^2+1}{(x-1)(x^3-1)}$

24. $\dfrac{x^3-19x-12}{(x+2)^3(x^2+1)}$

25. $\dfrac{(x^2+1)^2}{(x^3+1)^2}$

26. $\dfrac{x^4+4x-16}{(2-x^2)(4+x^2)}$

27. $$\frac{x^2-5x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+1)(x+2)}$$

$$+ \frac{c}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$ என்ற சமன்பாட்டில் a, b, c-ஐக் காண்க.

28. $$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)} = \frac{A}{1-ax} + \frac{B}{1-bx}$$ ஆனால்,

$$\frac{1}{(1-ax)^2(1-bx)} = \frac{A}{(1-ax)^2} + \frac{AB}{(1-ax)} + \frac{B^2}{(1-bx)}$$

என நிறுவுக. இதையொட்டி $\dfrac{1}{(1-x)^2(1-2x)}$-ன் பகுதிப் பின்னங்களைக் காண்க.

29. $\frac{3y^2-2y+1}{y^3-3y^2+2y}$ என்ற கோவையை $\frac{A}{(y-2)}+\frac{B}{(y-1)(y-2)}$ $+\frac{C}{y(y-1)(y-2)}$ என்ற அமைப்பிற் கொண்டால் A, B, C-ன் மதிப்புகள் காண்க.

30. $\frac{3y+1}{(y+2)(y+3)(y+4)}$ என்ற கோவையை $\frac{A}{y+2}$ $+\frac{B}{(y+2)(y+3)}+\frac{C}{(y+2)(y+3)(y+4)}$ என்ற அமைப்பிற்கொண்டால் A, B, C-ன் மதிப்புகள் காண்க.

31. $\frac{x+5}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$ என்ற கோவையை $\frac{A}{x}+\frac{B}{x(x+1)}$ $+\frac{C}{x(x+1)(x+2)}+\frac{D}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$ என்ற அமைப்பிற்கொண்டால் A, B, C, D-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

2. ஈருறுப்புத் தேற்றம்—அளவுக்ிணங்கிய படிகளுக்கு

(Binomial Theorem For Rational Index)

2·1. ஈருறுப்புச் சார்புக்கு எத்தனை படி (power) இருந்தாலும் அதை விரிவுபடுத்தி ஒரு தொடராக எழுதலாம். ஈருறுப்புத் தேற்றம் இதற்கு மிகவும் உதவுகிறது. புகுமுக வகுப்பில் ஈருறுப்புச் சார்பின் படி ஒரு கூட்டு முழு எண் எனக் கொண்டு இத் தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது. 'n' ஒரு கூட்டு முழு எண்ணானால்

$$(x+a)^n = x^n + {}^nc_1\, x^{n-1}\, a + {}^nc_2\, x^{n-2}\, a^2 + \quad \dots + {}^nc_r x^{n-r} a^r + \dots \\ \dots + {}^nc_n\, a^n \qquad (1)$$

என நிரூபிக்கப்பட்டது. இந்த விரிவின் கடைசி உறுப்பு ${}^nc_n\, a^n$ ஆகும்.

அதேபோல் $(x-a)^n = x^n + {}^nc_1\, x^{n-1}\, (-a) + {}^nc_2\, x^{n-2}\, (-a)^2 + \dots + {}^nc_r\, x^{n-r}\, (-a)^r + \dots + {}^nc_n\, (-a)^n$.

$$= x^n - {}^nc_1\, x^{n-1}\, a + {}^nc_2\, x^{n-2}\, a^2 + \dots + (-1)^r\, {}^nc_r\, x^{n-r}\, a_r + \\ \dots + (-1)^n\, {}^nc_n\, x^n \quad \dots \quad (2)$$

இந்த விரிவின் கடைசி உறுப்பு $(-1)^n\, {}^nc_n\, a^n$. எனவே n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாக இருக்கும்போது நமக்கு $(n+1)$ உறுப்புகளும், அவ் விரிவின் கடைசி உறுப்பும் கிடைக்கிறது. மேலும் நாம் அத்தொடரின் $(n+1)$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையையும் காண முடியும்.

மேற் கூறிய விரிவில் (1), (2)-ல் n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாக எடுத்துக்கொண்டு $x=1$; $a=x$ அல்லது $-x$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$(1+x)^n = 1 + {}^nc_1\, x + {}^nc_2\, x^2 + {}^nc_3\, x_3 + \dots + {}^nc_r\, x^r + \dots + {}^nc_n\, x^n$$

$$(1-x)^n = 1 - {}^nc_1\, x + {}^nc_2\, x^2 - {}^nc_3\, x^3 + \dots + (-1)^r\, {}^nc_r\, x_r + \dots \\ + (-1)^r\, {}^nc_n\, x^n$$

என்ற தொடர்கள் கிடைக்கும். இவை யாவும் நாம் புகுமுக வகுப்பில் படித்து இருக்கிறோம்.

n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாக இல்லாமல் ஏதாவது ஓர் அளவுக்கிணங்கிய மெய் எண்ணாக இருப்பின், அத்துடன் $-1 < x < +1$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக்கிணங்க,

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{\underline{|1}}x + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}x^3 + \dots \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r + \dots \dots \text{ கந்தழி வரை}$$

என்று ஈருறுப்புத் தேற்றம் ஒப்புக்கொள்ளப்பட்டு அதன் விரிவு களையும் கூட்டுத் தொகையையும், இவ்வத்தியாயத்தில் பார்ப் போம். ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை மூன்றும் பகுதியில் நிரூபிக்கலாம்.

n ஓர் அளவுக்கிணங்கிய மெய்யெண்ணாயிருப்பின் $|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அத்தொடர் முடிவில்லாத தொடராகிறது.

$n = \frac{1}{2}$ என எடுத்துக் கொண்டால்,

$$n(n-1)(n-2) \dots = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\dots$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\dots \text{ எனப்}$$

போய்க் கொண்டே இருக்கும். ஒரு முடிவுக்கு வாராது.

$n = -2$ என எடுத்துக்கொண்டால்,

$$n(n-1)(n-2) \dots = (-2)(-2-1)(-2-2) \dots \dots$$

$$= (-2)(-3)(-4) \dots \dots \text{ எனப்}$$

போய்க் கொண்டே இருக்கும்.

$$\text{ஆகையால் } 1 + \frac{n}{\underline{|1}}x + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2 + \dots \dots + \dots \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{\underline{|r}} \cdot x^n + \dots \dots$$

என்ற தொடர் ஒரு கந்தழித் தொடராகிறது. சில சமயங்களில் இக் கந்தழித் தொடரின் கூட்டுத்தொகை ஒரு திட்டமான

எண்ணாகும். அப்போது நாம் அத்தொடர் குவிகிறது (convergent) என்கிறோம்.

அத் தொடரின் கூட்டுத் தொகை, கந்தழியை அடையுமானால் அத்தொடர் விரிகிறது (Divergent) என்று கூறுகிறோம். இவை களைப் பற்றி நாம் மூன்றும் பகுதியில் பார்ப்போம்.

n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாக இருக்குமாகில் $(n+1)$ உறுப்புக் கள் கிடைக்கின்றன. எனவே அத்தொடரின் கூட்டுத் தொகை $(n+1)$ உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாகும். அது ஒரு திட்ட மான எண்ணாகும். எனவே நாம், n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணானால் அத்தொடர் குவிகிறது என்று கூறுகிறோம்.

n, ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண்ணானால், $|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்குச் சில விரிவுகளைப் பார்ப்போம்.

2·2 $n = -1$ எனக் கொண்டால்,

$$(1+x)^{-1} = 1 + \frac{(-1)}{\underline{|1}}x + \frac{(-1)(-1-1)}{\underline{|2}}x^2$$

$$+ \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{\underline{|3}}x^3 + \dots \dots \text{ கந்தழி வரை}$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \dots \dots \text{ கந்தழி வரை.}$$

$n = -1$, x-க்குப் பதில் $-x$ என எடுத்துக் கொண்டால்,

$$(1-x)^{-1} = 1 + \frac{(-1)(-x)}{\underline{|1}} + \frac{(-1)(-1-1)}{\underline{|2}}(-x)^2$$

$$+ \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{\underline{|3}}(-x)^3 + \dots \dots \text{ கந்தழி வரை}$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \quad \dots \quad \dots \quad \text{கந்தழி வரை.}$$

$n = -4$ என எடுத்துக் கொண்டால்,

$$(1+x)^{-4} = 1 + \frac{(-4)}{\underline{|1}}x + \frac{(-4)(-4-1)}{\underline{|2}}x^2$$

$$+ \frac{(-4)(-4-1)(-4-2)}{\underline{|3}}x^3 + \dots \dots \text{ கந்தழி வரை}$$

$$= 1 - \frac{4}{\underline{|1}} + \frac{4\cdot 5}{\underline{|2}}\, x^2 - \frac{4\cdot 5\cdot 6}{\underline{|3}} \cdot x^3 + \ldots \ldots \text{ கந்தழி வரை.}$$

$n = \frac{3}{2}$ எனக் கொண்டால்,

$$(1+x)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\underline{|1}}\, x + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)}{\underline{|2}}\, x^2 + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}{\underline{|3}}\, x^3 + \ldots \ldots \text{ கந்தழி வரை.}$$

$$= 1 + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\underline{|1}}\, x + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\underline{|2}}\, x^2 + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{\underline{|3}}\, x^3 + \ldots \ldots \text{ கந்தழி வரை.}$$

$$= 1 + \frac{3}{\underline{|1}}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{3.1}{\underline{|2}}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3.1.(-1)}{\underline{|3}}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots \ldots$$

$n = -\frac{p}{q}$ என்று எடுத்துக்கொண்டால்

$$(1+x)^{-\frac{p}{q}} = 1 + \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)}{\underline{|1}}\, x + \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)\left(-\frac{p}{q}-1\right)}{\underline{|2}} \cdot x^2 + \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)\left(-\frac{p}{q}-1\right)\left(-\frac{p}{q}-2\right)}{\underline{|3}}\, x^3 + \ldots \ldots$$

$$= 1 - \frac{p}{\underline{|1}}\left(\frac{x}{q}\right) + \frac{p(p+q)}{\underline{|2}}\left(\frac{x}{q}\right)^2 - \frac{p(p+q)(p+2q)}{\underline{|3}}\left(\frac{x}{q}\right)^3 + \ldots \text{ கந்தழி வரை}$$

$$= 1 + \sum_{1}^{\infty} (-1)^r \frac{p(p+q)(p+2q)\ldots\ldots(p+\overline{r-1}\,q)}{\underline{|r}}\left(\frac{x}{q}\right)^r \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (A)$$

$n = -\dfrac{p}{q}$; x-க்குப் பதில் $-x$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்

$$(1-x)^{-p/q} = 1 + \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)}{\underline{|1}}(-x) + \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)\left(-\frac{p}{q}-1\right)}{\underline{|2}}(-x)^2$$

$$+ \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)\left(-\frac{p}{q}-1\right)\left(-\frac{p}{q}-2\right)}{\underline{|3}}(-x)^3 + \dots \dots \infty \text{ வரை}$$

$$= 1 + \frac{p}{\underline{|1}}\,\frac{x}{q} + \frac{p(p+q)}{\underline{|2}}\left(\frac{x}{q}\right)^2$$

$$+ \frac{p(p+q)(p+2q)}{\underline{|3}}\left(\frac{x}{q}\right)^3 + \dots \dots \infty \text{ வரை}$$

$$= 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{p(p+q)(p+2q)\dots(p+\overline{r-1}q)}{\underline{|r}}\left(\frac{x}{q}\right)^r \quad \dots (B)$$

$(\; +1)$ஆவது உறுப்பை t_{r+1} எனக் குறிப்பிட்டால்

$$(A)\text{-ல்} \quad t_{r+1} = (-1)^r \frac{p(p+q)\dots(p+\overline{r-1}q)}{\underline{|r}}\left(\frac{x}{q}\right)^r$$

$$(B)\text{-ல்} \quad t_{r+1} = \frac{p(p+q)\dots(p+\overline{r-1}q)}{\underline{|r}}\left(\frac{x}{q}\right)^r$$

(A), (B)-இவ்விரண்டு தொடர்களும், முடிவில்லாத ஈருறுப்புத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையை அறிய மிகவும் உதவுகின்றன. எனவே நாம் இவற்றின் அமைப்பைப் பற்றிக் கவனிப்போம்.

(i) மேலெண்கள் $p(p+q)(p+2q)\dots\dots$ ஒரு கூட்டுத் தொடர் எண்களாக அமைந்துள்ளன. இக் கூட்டுத் தொடர் இரண்டாவது உறுப்பிலிருந்து ஆரம்பம் ஆகிறது. இக் கூட்டுத் தொடரின் பொது வேறுபாடு q

இரண்டாவது உறுப்பில் மேலெண் p

மூன்ருவது உறுப்பில் மேலெண் $p(p+q)$

நான்காவது உறுப்பில் மேலெண் $p(p+q)(p+2q)\dots$ என அமைந்துள்ளன.

(ii) கீழெண்கள் $\underline{|0} = 1$, $\underline{|1}$, $\underline{|2}$, $\underline{|3}$ … … என்று அமைந்துள்ளன.

(iii) $\frac{x}{q}$ என்ற இராசி 0, 1, 2, 3 … … என்ற படிகளைக் கொண்டுள்ளன.

(iv) $(1-x)^{-p/q}$ என்ற தொடரில் எல்லா உறுப்புகளும் கூட்டல் குறியைப் பெற்றுள்ளன.

$(1+x)^{-p/q}$ என்ற விரிவில் கூட்டல் குறியும், கழித்தல் குறியும் மாறி மாறி வருகின்றன.

இந்த நான்கு அமைப்புகளையும் கொண்ட ஒரு கந்தழித் தொடரின் கூட்டுத் தொகையை மிக எளிதாகக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

கீழ்க்கண்ட தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \dots \dots \text{ கந்தழி வரை.}$$

இத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையை S எனக் கொண்டால்

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \dots \dots \infty .$$

இத் தொடரில் எல்லா உறுப்புகளும் கூட்டல் குறியை பெற்றுள்ளன. எனவே இத்தொடர் $(1-x)^{-p/q}$ என்ற அமைப்பில் இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \; S = 1 + \frac{1}{3\cdot\underline{|1}} + \frac{1\cdot 3}{\underline{|2}\cdot 3^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{\underline{|3}\cdot 3^3} + \dots \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{\underline{|1}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{(1)(3)}{\underline{|2}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$+ \frac{(1)(3)(5)}{\underline{|3}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots \dots \text{ கந்தழி வரை.}$$

இதை $(1-x)^{-p/q}$-ன் விரிவுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்,

$$p(p+q)\,(p+q) \dots \dots = 1\cdot 3\cdot 5 \dots \dots$$

எனவே $p = 1,\ q = 2$

$$\frac{x}{q} = \frac{1}{3},\ q = 2. \qquad \therefore\ x = \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ S = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\frac{1}{4} + \frac{1 . 3}{4 . 6} + \frac{1 . 3 . 5}{4 . 6 . 8} + \dots \text{ கந்தழிவரை } = 1$$

என்று நிரூபிக்க.

இடப் பக்கம், S என்று எடுத்துக்கொண்டால்,

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1 . 3}{4 . 6} + \frac{1 . 3 . 5}{4 . 6 . 8} + \dots \dots \infty.$$

$$= \frac{1}{\underline{|2} . 2} + \frac{1 . 3}{\underline{|3} . 2^2} + \frac{1 . 3 . 5}{\underline{|4} . 2^3} + \dots \dots \infty.$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})}{\underline{|2}} + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})}{\underline{|3}} + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})}{\underline{|4}} + \dots \dots \infty.$$

இரண்டு பக்கங்களையும் $(\frac{1}{2})$ஆல் பெருக்க,

$$\tfrac{1}{2}\,S = \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{\underline{|2}} + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})}{\underline{|3}} + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})}{\underline{|4}} + \dots \dots \infty$$

$$\therefore\ \tfrac{1}{2}\,S = -\left[\frac{(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{\underline{|2}} + \frac{(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})}{\underline{|3}} + \frac{(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})}{\underline{|4}} + \dots \dots \text{ கந்தழி வரை}\right]$$

$$\tfrac{1}{2}\,S = -\left[1 + \frac{(-\frac{1}{2})}{\underline{|1}} + \frac{(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{\underline{|2}} + \frac{(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})}{\underline{|3}} + \dots \dots \text{ கந்தழி வரை}\right] + \left[1 + \frac{(-\frac{1}{2})}{\underline{|1}}\right]$$

வலப் பக்கம் முதல் அடைப்புக் குறியில் உள்ள கந்தழித் தொடரில்

$$p = \tfrac{1}{2};\ q = 1;\ \frac{x}{q} = 1.$$

$\therefore\ x = 1.$

$$\therefore\ \tfrac{1}{2}S = -[(1-1)^{(-\frac{1}{2})}] + \left[1 + \frac{(-\frac{1}{2})}{\lfloor 1}\right]$$

$$\tfrac{1}{2}S = -[0] + 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore\quad S = 1.$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் கூட்டுத்தொகை 1 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

கீழ்க்கண்ட தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$\frac{1.4}{5.10} - \frac{1.4.7}{5.10.15} + \frac{1.4.7.10}{5.10.15.20} - \ \ldots \text{ கந்தழி வரை.}$$

கொடுக்கப்பட்ட தொடரை S என்று எடுத்துக்கொண்டால்

$$S = \frac{1.4}{5.10} - \frac{1.4.7}{5.10.15} + \frac{1.4.7.10}{5.10.15.20} - \ \ldots\ \ldots \text{ கந்தழி வரை}$$

$$= \frac{(1)(4)}{\lfloor 2.5^2} - \frac{(1)(4)(7)}{\lfloor 3.5^3} + \frac{(1)(4)(7)(10)}{\lfloor 4.5^4} - \ \ldots\ \ldots \text{ கந்தழி வரை.}$$

$$= \frac{(1)(4)}{\lfloor 2.5^2} - \frac{(1)(4)(7)}{\lfloor 3.5^3} + \frac{(1)(4)(7)(10)}{\lfloor 4.5^4} \ \ldots\ \ldots \text{ கந்தழி வரை.}$$

இத்தொடரில் ஏதாகிலும் ஓர் உறுப்பை எடுத்துக்கொண்டு அத்தொடரின் அமைப்பை ஆராய்வோம். மூன்றுவது உறுப்பு t_3-ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$t_3 = \frac{(1)(1+1\times3)(1+2\times3)(1+3\times3)}{\lfloor 4}\left(\frac{1}{5}\right)^4$$

$$p = 1 \qquad q = 3.$$

$$\frac{x}{q} = \frac{1}{5} \qquad \therefore\ x = \frac{3}{5}$$

S-ன் உறுப்புகள் மாறி மாறி கூட்டல் குறி, கழித்தல் குறிகளைப் பெற்று இருப்பதால் S ஆனது $(1+x)^{-p/q}$ என்ற அமைப்பில்

முதல் இரண்டு உறுப்புகள் இல்லாமல் உள்ளது. எனவே $x = \frac{3}{5}$; $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$ என ஈடு செய்தால்,

$$\left(1+\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{(-\frac{1}{3})}{\underline{|1}}\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}-1)}{\underline{|2}}\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$+ \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}-1)(-\frac{1}{3}-2)}{\underline{|3}}\left(\frac{3}{5}\right)^3$$

$+ \ldots \quad \ldots$ கந்தழி வரை.

$$= 1 - \frac{1}{\underline{|1}.5} + \frac{1.4}{\underline{|2}.5^2} - \frac{1.4.7}{\underline{|3}.5^3} + \ldots \ldots$$

$$\therefore \left(1+\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1 + \frac{1}{\underline{|1}.5} = \frac{1.4}{\underline{|2}.5^2} - \frac{1.4.7}{\underline{|3}.5^3} + \ldots \ldots$$

வலப் புறம் S-க்குச் சமம்.

அதாவது கொடுக்கப்பட்ட தொடராகும். எனவே,

$$S = \left(1+\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(1+\frac{1}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{8}{5}\right)^{-\frac{1}{3}} - \frac{4}{5}$$

$$= \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{5}$$

$$= \frac{1}{2}\,(5)^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{5}.$$

2·3. உறுப்புகளின் குறிகள்

U_r என்று $(1+x)^n$-ன் விரிவத்தில் உள்ள 'r' ஆவது உறுப்பினைக் குறிப்போம். $U_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}x^r$

$= \binom{n}{r}x^r$ எனக் குறிப்பிட்டால் இங்கு $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-r+1)}{r!}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{U_{r+1}}{U_r} = \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r-1}} x = \frac{n-r+1}{r} \; x.$$

$$= \left(\frac{n+1}{r} - 1\right) x$$

இப்போது $\left(\frac{n+1}{r} - 1\right)$ என்பது கூட்டு மதிப்பையும், குறை மதிப்பையும் எவ்வெப்பொழுது அடைகின்றது என்பதைக் காண்போம்.

$n+1 \leqslant 0$ ஆக இருப்பின்.

r-ன் எல்லா மதிப்பிற்கும் $\left(\frac{n+1}{r} - 1\right)$ குறை மதிப்பைப் பெறுகின்றது.

$n+1>0$ ஆக இருந்தால், '$n+1$'-ஐ விட 'r' மிகுந்திருக்கும் போது $\left(\frac{n+1}{r} - 1\right)$ குறை மதிப்பை அடைகின்றது.

$n+1>0$ ஆக இருந்தால், '$n+1$'-ஐ விட 'r, குறைந்திருக்கும்போது $\left(\frac{n+1}{r} - 1\right)$ கூட்டு மதிப்பை அடைகின்றது.

எனவே,

I. x கூட்டு மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்போது,

(i) $n \leqslant -1$ ஆக இருப்பின் r-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்,

(ii) $n > -1$ ஆக இருப்பின் r-ன் $n+1$-ஐ விட மிகுந்திருக்கும் மதிப்புகளுக்கும்,

U_{r+1}-ம் U_r-ம் வெவ்வேறு குறிகளைப் பெற்றிருக்கும்.

அதாவது மேற்கூறிய கட்டுப்பாடுகளில் $(1+x)^n$-ல் உள்ள உறுப்புகளின் குறிகள் ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்திலிருந்து முன்னதற்கும் பின்னதற்கும் மாறி மாறி வரும்.

II. x குறை மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்போது,

(i) $n \leqslant -1$ ஆக இருக்கும்போது $(1+x)^n$-ன் விரிவத்தின் உறுப்புகள் யாவும் கூட்டுக் குறியைப் பெற்றிருக்கும்.

(ii) $n > -1$ ஆக இருக்கும்போது $(1+x)^n$-ன் விரிவத்தில் r ஆவது உறுப்பினிற்குப் பின் வரும் உறுப்புகள் யாவும் r ஆவது உறுப்பின் குறியையே பெற்றுவரும். ஈண்டு r, $n+1$-க்கு அடுத்த முதல் முழு எண்ணாகும்.

2·4. $(1+x)^n$-ன் விரிவத்தில் மட்டளவில் பெரிய உறுப்பு

U_r என்பது r ஆவது உறுப்பு என்க.

U_{r+1} என்பது $r+1$ ஆவது உறுப்பு ஆகும்.

$|U_r|$ என்பது U_r-ன் மட்டளவு.

$$\therefore \quad \frac{|U_{r+1}|}{|U_r|} = \left|\frac{n-r+1}{r}\right| |x| = \frac{|n-r+1|}{|r|} |x|.$$

I. $-1 \leqslant n \leqslant 0$: இக் கட்டுப்பாட்டில் $-n+r-1 \geqslant 0$

$$\therefore \quad \left|\frac{U_{r+1}}{U_r}\right| = -\frac{n+r-1}{r} \cdot |x|.$$

ஆனல், $|x| < 1$. மேலும் $r = (r-1)+1 \geqslant (r-1)-n$

$[\because \quad -1 \leqslant n \leqslant 0]$

$$\therefore \quad \left|\frac{U_{r+1}}{U_r}\right| \leqslant |x| < 1$$

$$\therefore \quad |U_{r+1}| < |U_r|$$

எனவே, $|U_1| > |U_2| > |U_3| > \ldots \ldots$

$\therefore$ $(1+x)^n$-ன் முதல் உறுப்புதான் மட்டளவிற் பெரிய உறுப்பாகும்.

II. $n < -1$: இக் கட்டுப்பாட்டில் $-n-1+r \geqslant 0$

எனவே, $\left|\dfrac{U_{r+1}}{U_r}\right| = \dfrac{-n-1+r}{r} \cdot |x|$

$$\therefore \quad \left|\frac{U_{r+1}}{U_r}\right| \gtreqless 1 \text{ என்று இருப்பது } \frac{r-1-n}{r} \mid x \mid \gtreqless 1$$

என்று இருப்பதைப் பொருத்தது.

(அதாவது) $\left|\frac{U_{r+1}}{U_r}\right| \gtreqless 1$ என்று இருப்பது $\frac{-n-1}{r}+1 \gtreqless \frac{1}{\mid x \mid}$

என்று இருப்பதைப் பொருத்தது.

$$\left|\frac{U_{r+1}}{U_r}\right| \gtreqless 1 \text{ என்று இருப்பது } \frac{-(n+1)}{r} \gtreqless \frac{1-\mid x \mid}{\mid x \mid}$$

என்று இருப்பதைப் பொருத்தது.

$$\left|\frac{U_{r+1}}{U_r}\right| \gtreqless 1 \text{ என்று இருப்பது } -(n+1) \gtreqless \frac{1-\mid x \mid}{\mid x \mid} \cdot r$$

என்று இருப்பதைப் பொருத்தது.

$$\left|\frac{U_r+1}{U_r}\right| \gtreqless 1 \text{ என்று இருப்பது } r \lesseqgtr \frac{\mid x \mid (-n-1)}{1-\mid x \mid}$$

என்று இருப்பதைப் பொருத்தது.

$\frac{\mid x \mid \ (-n-1)}{1-\mid x \mid}$ என்பதைக் கவனிக்க. இதை $i+k$ என்று எழுதலாம். ஈண்டு i என்பது ஒரு நேர் முழு எண். k என்பது $0 < k < 1$ என்ற கட்டுபாட்டில் அமையும்.

எனவே $\left|\frac{U_{r+1}}{U_r}\right| \gtreqless 1$ என்று இருப்பது $r \lesseqgtr i+k$ என்று இருப்பதைப் பொருத்தது.

அதாவது, (i) $i+k$ விற்குக் குறைந்த r-ன் மதிப்புகளுக்கு

$$\mid U_{r+1} \mid > \mid U_r \mid$$

$$\therefore \quad \mid U_{i+1} \mid > \mid U_i \mid > \mid U_{i-1} \mid > \ldots > \mid U_1 \mid .$$

(ii) $i+k$ விற்கு மிகுந்த r-ன் மதிப்புகளுக்கு $\mid U_{r+1} \mid < \mid U_r \mid$. '$r$' இக் கட்டுப்பாட்டில் எடுக்கக் கூடிய மதிப்புகள் $i+1,\ i+2,\ i+3,\ \ldots$

எனவே, $\mid U_{i+1} \mid > \mid U_{i+2} \mid > \mid U_{i+3} \mid > \ \ldots \ \ldots \ \ldots$

எனவே, $i+1$ ஆவது உறுப்புதான் மட்டளவிற் பெரிய உறுப்பாகும்.

இனி $\frac{|x|(-n-1)}{1-|x|} = i$ ஆக இருப்பின் $r=i$.

$\therefore \; |U_{i+1}| = |U_i|$

எனவே $i+1$, i என்பவைகள்தாம் மட்டளவிற் பெரிய உறுப்புகள்.

III. $n>0$: இக்கட்டுப்பாட்டில் $n-r+1 \gtreqless 0$

$\therefore \left|\frac{U_{r+1}}{U_r}\right| \gtreqless 1$ என்பது $\left|\frac{n-r+1}{r}\right| |x| \gtreqless 1$ என்று இருப்பதைப் பொருத்தது.

" " $\left|\frac{n+1}{r}-1\right| |x| \gtreqless 1$ என்று இருப்பதைப் பொருத்தது.

p-என்பதை $p \leqslant n+1 < p+1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அமைந்த நேர் முழு எண் என்க.

$r>p$ ஆக இருக்கும்போது $\frac{p}{r}<1$

$\therefore \left|\frac{n+1}{r}-1\right| < 1 \qquad [\because \; p \leqslant n+1 < p+1]$

மேலும் $|x|<1 \qquad \therefore \left|\frac{n+1}{r}-1\right| |x| < 1$

$\therefore \left|\frac{U_{r+1}}{U_r}\right| < 1$

எனவே $r>p$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $|U_{r+1}| < |U_r|$

அதாவது p ஐ விடப் பெரிய r-ன் மதிப்புகளுக்கு $|U_{r+1}| < |U_r|$

$\therefore \; |U_{p+1}| > |U_{p+2}| > \ldots \quad \ldots, \quad \ldots \quad \ldots,$

$r \leqslant p$ ஆக இருப்பின்:

$$\frac{n+1}{r} - 1 \geqslant 0$$

$$\therefore \quad \left| \frac{U_r+1}{U_r} \right| \gtreqless 1 \text{ என்று இருப்பது } \left(\frac{n+1}{r} - 1 \right) | x | \gtreqless 1$$

என்று இருத்தலைப் பொருத்தது.

,, ,, ,, $\frac{n+1}{r} \gtreqless \frac{1+|x|}{|x|}$

என்று இருத்தலைப் பொருத்தது

,, ,, ,, $r \gtreqless \frac{(n+1)|x|}{1+|x|}$

என்று இருத்தலைப் பொருத்தது.

முன் போலவே $\frac{(n+1)|x|}{1+|x|} = i + k$ எனப் பிரித்து $(i+1)$ ஆவது உறுப்பு மட்டு மதிப்பிற் பெரியது என்பதைக் காணலாம்.

$\frac{(n+1)|x|}{1+|x|} = i$ ஆக இருக்கும்போது,

$|U_{i+1}| = |U_i|$. இவைகள்தாம் மட்டு மதிப்பிற் பெரியவை.

2·5. குவித் தொடர் கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகை

தேற்றம்: "$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ என்ற கந்தழித் தொடர் ஓர் அறக் குவித் தொடராயின் முதல் $(r+1)$ கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகையாகிய $a_0 + a_1 + a_2 + \dots \dots + a_r$, $\frac{f(x)}{1-x}$-ன் விரிவத்தின் x^r—ன் கெழுவிற்குச் சமம்."

மெய்ப்பாடு:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

எனவே,

$$\frac{f(x)}{1-x} = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots \quad \dots)$$

$$= a_0 + (a_0 + a_1)\,x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \dots \quad \dots \quad \dots$$

எனவே,

$\dfrac{f(x)}{1-x}$-ன் விரிவத்தில் x^r-ன் கெழு $(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_r)$ ஆகும்.

மேற்கண்ட மெய்ப்பாட்டில், இரு அறக் குவித் தொடர்களின் பெருக்கலாற் கிடைக்கும் தொடரும் ஓர் அறக் குவித் தொடர்தான் என்ற உண்மையையும், அப்படிக் கிடைக்கும் அறக் குவித் தொடர் குவியும் சார்பு எடுத்துக் கொண்ட அறக் குவித் தொடர்கள் தனித் தனியே குவியும் சார்புகளின் பெருக்கற் பலனிற்குச் சமம், என்ற உண்மையையும் பயன்படுத்தி உள்ளோம்.

2·6. பல்லுறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம்

n ஒரு விகிதமுறு எண்ணுயின்,

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \dots)^n$$

$$= a_0^n \left(1 + \frac{a_1}{a_0}\,x + \frac{a_2}{a_0}\,x^2 + \dots \quad \dots\right)^n$$

$$= a_0^n \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \binom{n}{r} (p_1 x + p_2 x^2 +)^r \right\}$$

இங்கு $p_r = \dfrac{a_r}{a_0}$.

2. தோராய மதிப்புகள்

$|x|$-ன் மதிப்பு மிக மிகச் சிறியதாக இருந்தால் அதன் படி அதிகமாகும்போது அதன் மதிப்பு மிக மிகச் சிறியதாகிறது. $|x| = \frac{1}{2}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால் $|x|^2 = \frac{1}{4}$, $|x|^3 = \frac{1}{8}$ … எனக் குறைந்து கொண்டே வரும். எனவே அச் சிறிய மதிப்புகள் எடுத்துக்கொள்ளத் தேவையில்லாத அளவிற்கு இருக்கும். அந் நிலையில் நாம், நமக்கு எந்த அளவுக்கு வேண்டுமோ அந்த அளவுக்குத் தோராய மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்,

எடுத்துக்காட்டு 4 :

n மிகச் சிறியதாகயிருப்பின்

$$\frac{(1-2x)^{-\frac{1}{2}} - (1+2x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1+x)^{\frac{1}{2}}} = 4 + 2x \text{ (தோராயமாக)}$$

என நிறுவுக.

மேலெண் $(1-2x)^{-\frac{1}{2}} - (1+2x)^{\frac{1}{2}}$

$$= \left[1 + \frac{\frac{1}{2}}{\underline{|1}} 2x + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)}{\underline{|2}}(2x)^2 + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{\underline{|3}}.(2x)^3 + \dots \dots \text{ கந்தழி வரை}\right]$$

$$- \left[1 + \frac{\frac{1}{2}}{\underline{|1}} 2x + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)}{\underline{|2}}(2x)^2 + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{\underline{|3}}(2x)^3 + \dots \dots \text{ கந்தழி வரை}\right].$$

$$= 2x^2 + 2x^3 + \dots \quad \dots \quad \text{கந்தழி வரை.}$$

கீழெண் $(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$= \left[1 + \frac{\frac{1}{2}}{\underline{|1}} x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}{\underline{|2}} x^2 + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{\underline{|3}} x^3 + \dots \dots \text{ கந்தழி வரை}\right]$$

$$- \left[1 + \frac{\frac{1}{2}}{\underline{|1}} x + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)}{\underline{|2}} x^2 + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{\underline{|3}} x^3 + \dots \dots \text{ கந்தழி வரை}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}x^3 + \dots \dots \text{ கந்தழி வரை}$$

$$\therefore \quad \frac{(1-2x)^{-\frac{1}{2}} - (1+2x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1+x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x^2 + 2x^3}{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3} \text{ (தோராயமாக)}$$

$$= \frac{2x^2(1+x)}{\frac{1}{2}x^2(1+\frac{1}{2}x)}$$

$$= 4(1+x)(1+\tfrac{1}{2}x)^{-1}$$

$$= 4(1+x)(1+\tfrac{1}{2}x)$$
(தோராயமாக)

$$= 4 + 2x \text{ (தோராயமாக)}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

p, q-உடன் ஒப்பிடும்போது $(p-q)$-ன் மதிப்பு மிகச் சிறிய தாயின், $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{n}}$ = தோராயமாக $\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}$ என நிறுவுக.

இதைப் பயன்படுத்தி $\left(\frac{131}{133}\right)^{\frac{1}{7}}$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{2p}{2q} = \frac{(p+q)+(p-q)}{(p+q)-(p-q)}$$

$$\therefore \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{(p+q)+(p-q)}{(p+q)-(p-q)}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left[\frac{1+\dfrac{p-q}{p+q}}{1-\dfrac{p-q}{p+q}}\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{\left[1+\dfrac{p-q}{p+q}\right]^{\frac{1}{n}}}{\left[1-\dfrac{p-q}{p+q}\right]^{\frac{1}{n}}}.$$

$$= \frac{1+\dfrac{1}{n}\,\dfrac{p-q}{p+q}+\dots\dots}{1-\dfrac{1}{n}\,\dfrac{p-q}{p+q}+\dots\dots}$$

p, q இவைகளுடன் ஒப்பிடும்போது $p-q$ சிறியதாகையால், $\frac{p-q}{p+q}$ சிறிய எண். ஆகவே அதன் இரண்டு மூன்று ... ... படிகளை விட்டுவிட்டால்,

$$= \frac{n(p+q)+(p-q)}{n(p+q)-(p-q)} \text{ (தோராயமாக)}$$

$$= \frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q} \text{ (தோராயமாக)}$$

$$\therefore \left(\frac{p}{q}\right)^{1/n} = \frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q} \quad \text{(தோராயமாக)}$$

$p=131,\ q=133,\ n=7$ என்று ஈடு செய்தால்

$$\left(\frac{131}{133}\right)^{\frac{1}{7}} = \frac{(7+1)131+(7-1)133}{(7-1)131+(7+1)133}$$

(தோராயமாக)

$$= \frac{1048+798}{786+1064}$$

$$= \frac{1846}{1850} = \frac{923}{925} \text{ (தோராயமாக)}$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

c ஆனது l-ஐ விடச் சிறியதாயிருப்பின்,

$$\left(\frac{l}{l+c}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{l}{l-c}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{3c^2}{4l^2} \text{(தோராயமாக)}$$

என நிறுபி.

$$\left(\frac{l}{l+c}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{l}{l-c}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{l}{l\left(1+\frac{c}{l}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{l}{l\left(1-\frac{c}{l}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1+\frac{c}{l}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1-\frac{c}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[1 + \frac{(-\frac{1}{2})\frac{c}{l}}{\underline{|1}} + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{\underline{|2}}\left(\frac{c}{l}\right)^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{\underline{|3}}\left(\frac{c}{l}\right)^3 + \dots\dots\infty\right]$$

$$+ \left[1 + \frac{\frac{1}{2}}{\underline{|1}}\frac{c}{l} + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)}{\underline{|2}}\left(\frac{c}{l}\right)^2 + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{\underline{|3}}\left(\frac{c}{l}\right)^3 + \dots\dots\infty\right]$$

$$= \left[1 - \frac{c}{2l} + \frac{3}{8}\frac{c}{l^2} + \dots \infty\right]$$

$$+ \left[1 + \frac{c}{2l} + \frac{3c^2}{8l^2} + \dots \dots \infty\right]$$

$$= 2 + \frac{3c^2}{4l^2}$$ தோராயமாக $(c < l \therefore \frac{c}{l} < 1.$

∴ இதன் படிகள் அதிகரிக்கும்போது அதன் மதிப்பு குறைந்து கொண்டே போகும்).

எடுத்துக்காட்டு 7 :

n-ன் மதிப்பு மிகப் பெரிதாக இருப்பின்,

$\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+1} = \frac{3}{2x} - 8x^3 + \frac{6^3}{16x^5}$ (தோராயமாக) என்று நிறுவுக.

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} = \left[x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= x\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = x\left[1 + \frac{1}{2}\frac{4}{x^2}\right.$$

$$+ \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)}{1\cdot2}\left(\frac{4}{x^2}\right)^2$$

$$\left. + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\left(\frac{4}{x^2}\right)^3 + \dots \dots \infty\right]$$

$$= x\left[1 + \frac{1}{2}\frac{4}{x^2} + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{1\cdot2}\cdot\left(\frac{4}{x^2}\right)^2\right.$$

$$\left. + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{4}{x^2}\right)^3 + \dots \dots \infty\right]$$

$$= x + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5} + \dots \dots$$

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= x\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{x^2}\right)^3 + \dots \dots \infty\right]$$

$$= x\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1.2.3}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^3 + \dots \dots \infty\right].$$

$$= x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + \frac{1}{16x^5} \dots \dots \dots$$

$$\therefore \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+1} = \left(x + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5} \dots \dots\right) - \left(x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + \frac{1}{16x^5} \dots \dots\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{x^3}\left(2 - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{x^5}\left(4 - \frac{1}{16}\right) + \dots \dots$$

$$= \frac{3}{2x} - \frac{15}{8x^3} + \frac{63}{16x^5}.$$ (தோராயமாக)

(x சிறியது. $\therefore \frac{1}{x}$ சிறியது. எனவே இதன் உயர்ந்த படிகள் விடப்பட்டன.)

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$\frac{\sqrt{1+x}\,(4-3x)^{\frac{3}{2}}}{(8+5x)^{\frac{1}{3}}}$ -ல் x மிகச் சிறியதாக இருப்பின் $x^2, x^3 \dots \dots \dots$ ஆகியவற்றை நீக்கி, அதன் தோராய மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

$$\frac{\sqrt{1+x}\,(4-3x)^{\frac{3}{2}}}{(8+5x)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{3x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{8^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{5x}{8}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{3x}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}}\left(1+\frac{5x}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{4^{\frac{3}{2}}}{8^{\frac{1}{3}}} \cdot [1+\tfrac{1}{2}x+\ldots][1-\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{3}{4}x+\ldots]\left[1-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{5x}{8}+\ldots\right]$$

$= 4\,[1+x(\frac{1}{2}-\frac{9}{8}-\frac{5}{24})]$ தோராயமாக.

$= 4 - \frac{10}{3}x$ (தோராயமாக).

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\sqrt{\frac{50}{49}}$ ஆனல் $\sqrt{2}$-ன் மதிப்பை 3 தசமத் தானங்களுக்குக் காண்க.

$$\sqrt{\frac{50}{49}} = \left(1-\frac{1}{50}\right)^{-\frac{1}{2}} = (1-\cdot 02)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{(\frac{1}{2})(\cdot 02)}{\lfloor 1} + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)}{\lfloor 2}(\cdot 02)^2$$

$$+ \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{\lfloor 3}(\cdot 02)^3 + \ldots \quad \ldots \quad \infty$$

$$= 1 + \cdot 01 + \cdot 00015 + \ldots \ldots$$

$= 1\cdot 01015$ தோராயமாக.

$$\therefore \quad \sqrt{2} = \frac{7}{5}\sqrt{\frac{50}{49}} = \frac{7}{5}(1\cdot 01015)$$

$= 1.41421 = 1.414$ தோராயமாக

எடுத்துக்காட்டு 10 :

கீழ்க்கண்ட தொடர்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க :

1. $\frac{2}{6} + \frac{2.5}{6.12} + \frac{2.5.8}{6.12.18} + \ldots \quad \ldots \quad \infty$

2. $\frac{11.14}{10.15.20} + \frac{11.14.17}{10.15.20.25} + \frac{11.14.17.20}{10.15.20.25.30} + \ldots \quad \ldots \quad \infty$

3. $\frac{3}{1}+\frac{3.5}{1.2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3.5.7}{1.2.3}\cdot\frac{1}{3^2}+\quad\ldots\quad\ldots\quad\infty$

4. $\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5.7}{2.3}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5.7.9}{2.3.4}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\quad\ldots\quad\infty$

5. $\frac{5}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5.7}{1.2.3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{5.7.9}{1.2.3.4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4$
$+\quad\ldots\quad\ldots\quad\infty$

6. $\frac{3}{2.4}+\frac{3.4}{2.4.6}+\frac{3.4.5}{2.4.6.8}+\quad\ldots\quad\ldots\quad\infty$

7. $1+\frac{10}{9}+\frac{10.16}{9.18}+\frac{10.16.22}{9.18.27}+\quad\ldots\quad\infty$

8. $\frac{5}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{12}\right)^2+\frac{5.8}{\underline{|3}}\left(\frac{1}{12}\right)^3+\frac{5.8.11}{\underline{|4}}\left(\frac{1}{12}\right)^4$

1. $S=\frac{2}{6}+\frac{2.5}{6.12}+\frac{2.5.8}{6.12.18}+\quad\ldots\quad\ldots\quad\infty$

$$=\frac{2}{\underline{|1}}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2.5}{\underline{|2}}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{2.5.8}{\underline{|3}}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3$$
$$+\quad\ldots\quad\ldots\quad\infty$$

$$\therefore\quad S+1=1+\frac{2}{\underline{|1}}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{2.5}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{6}\right)^2$$
$$+\frac{2.5.8}{\underline{|3}}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+\quad\ldots\quad\infty$$

$$=1+\frac{2}{\underline{|1}}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{2\,(5)}{\underline{|2}}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2+$$
$$\frac{2\,(5)\,(8)}{\underline{|3}}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+\quad\ldots\quad\infty$$

$$=1+\frac{p}{\underline{|1}}\left(\frac{x}{q}\right)+\frac{p\,(p+q)}{\underline{|2}}\cdot\left(\frac{x}{q}\right)^2$$

$+\ \ldots\ \infty$-உடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்போது

இங்கு $p = 2.\ \ q = 3.\ \ \dfrac{x}{q} = \dfrac{1}{6}\ .\ \ \therefore\ \ x = \dfrac{1}{2}$.

$$\therefore\ \ (S+1) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$S + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\therefore\ \ S = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} - 1 = 2^{\frac{2}{3}} - 1$$

2. $S = \dfrac{11.14}{2.3.4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^3 + \dfrac{11.14.17}{2.3.4.5}\left(\dfrac{1}{5}\right)^4 + \dots\ \infty$.

இரண்டு பக்கங்களையும் $5.8.\left(\dfrac{1}{5}\right)$ ஆல் பெருக்கினல்,

$$S.\ 5.8.\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{5.8.11.14}{1.2.3.4}\left(\frac{1}{5}\right)^4 + \frac{5.8.11.14.17}{1.2.3.4.5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 + \dots\ \dots\ \infty$$

$$S.\ 8 = \frac{5.8.11.14}{\underline{|4}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4 + \frac{5.8.11.14.17}{\underline{|5}}\left(\frac{1}{5}\right)^5 + \dots\ \dots\ \infty$$

இரண்டு பக்கங்களிலும், $1 + \dfrac{5}{1}\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right) + \dfrac{5\cdot 8}{\underline{|2}}\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 + \dfrac{5.8.11}{\underline{|3}}\left(\dfrac{1}{5}\right)^3$ ஐக் கூட்டுவோமானல்,

$$8.S + \left[1 + \frac{5}{\underline{|1}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{5.8}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{5.8.11}{\underline{|3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]$$

$$= 1 + \frac{5}{\underline{|1}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{5.8}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{5.8.11}{\underline{|3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{5.8.11.14}{\underline{|4}}\left(\frac{1}{5}\right)^4 + \dots\ \infty$$

வலப் புறம் $(1-x)^{-p/q} = 1 + \frac{p}{\lfloor 1}\left(\frac{x}{q}\right)$

$$+ \frac{p(p+q)}{\lfloor 2}\left(\frac{x}{q}\right)^2 + \dots \dots \infty$$

என்ற அமைப்பில் உள்ளது. இங்கு,

$$p = 5;\ \frac{x}{q} = \frac{1}{5};\ q = 3. \quad \therefore\ x = \frac{3}{5}$$

$\therefore$ வலப் புறத்தை $\left(1 - \frac{3}{5}\right)^{-\frac{5}{3}}$ என எழுதலாம்.

$$\therefore\ 8.S + \left[1 + \frac{5}{\lfloor 1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{5.8}{\lfloor 2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{5.8.11}{\lfloor 3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]$$

$$= \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{-\frac{5}{3}}$$

$$8.S + 2 + \frac{4}{5} + \frac{44}{75} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{5}{3}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$$8.S + \frac{254}{75} = \sqrt[3]{\frac{3125}{32}}.$$

$$\therefore\ 8S = \sqrt[3]{\frac{3125}{32}} - \frac{254}{75}$$

$$\therefore\ S = \frac{1}{8}\sqrt[3]{\frac{3125}{32}} - \frac{127}{300}$$

3. $S = \frac{3}{\lfloor 1}\cdot 1 + \frac{3.5}{\lfloor 2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)$

$$+ \frac{3.5.7}{\lfloor 3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots \dots \infty$$ ஆனல்

இரண்டு பக்கங்களையும் $\left(\frac{1}{3}\right)$ ஆல் பெருக்க,

$$\frac{1}{3}\cdot S = \frac{3}{\underline{|1}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3.5}{\underline{|2}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3.5.7}{\underline{|3}}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots\dots \infty$$

இரண்டு பக்கங்களிலும் 1 ஐக் கூட்ட,

$$1+\frac{1}{3}\cdot S = 1 + \frac{3}{\underline{|1}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3.5}{\underline{|2}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3.5.7}{\underline{|3}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots\dots \infty$$

வலப் புறத்தை $1 + \frac{p}{\underline{|1}}\left(\frac{x}{q}\right) + \frac{p(p+q)}{\underline{|2}}\left(\frac{x}{q}\right)^2 + \dots\dots \infty$

என்ற தொடருடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்போது,

$$p = 3;\ q = 2;\ \frac{x}{q} = \frac{1}{3}. \qquad \therefore\ x = \frac{2}{3}$$

எனக் கிடைக்கும்.

$\therefore$ வலப் புறத்தை $(1-x)^{-\frac{p}{q}} = \left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$

என்று எழுதலாம்.

$$\therefore\ 1+\frac{1}{3}S = \left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} = (3)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

$$\therefore\ S = 3\,[3\sqrt{3}-1]$$

4. $$S = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{5.7}{2.3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5.7.9}{2.3.4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots \dots \infty$$

இரண்டு புறங்களையும் $3.\left(\frac{1}{3}\right)$ ஆல் பெருக்க,

$$S.\,3.\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3.5}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3.5.7}{1.2.3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{3.5.7.9}{1.2.3.4}\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots \dots \infty$$

$$S = \frac{3.5}{\underline{|2}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3.5.7.}{\underline{|3}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{3.5.7.9}{\underline{|4}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots \dots \infty$$

$+1\ \frac{3}{\underline{|1}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)$ ஐ இரண்டு பக்கங்களிலும் கூட்டினால்

$$S + \left[1 + \frac{3}{\underline{|1}}\cdot\frac{1}{3}\right] = 1 + \frac{3}{\underline{|1}}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3.5}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3.5.7}{\underline{|3}}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots \dots \infty$$

$$= 1 + \frac{p}{\underline{|1}}\left(\frac{x}{q}\right) + \frac{p(p+q)}{\underline{|2}}\left(\frac{x}{q}\right)^2 + \dots \dots \infty$$

$$= (1-x)^{-p/q}.$$

இங்கு $p = 3;\ q = 2;\ \frac{x}{q} = \frac{1}{3}$. $\therefore\ x = \frac{2}{3}$.

$$\therefore\ S + \left[1 + \frac{3}{\underline{|1}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} = (3)^{\frac{3}{2}}$$

$$S + 2 = 3\sqrt{3}.$$

$$\therefore\ S = 3\sqrt{3} - 2.$$

5. $$S = \frac{5}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5.7}{1.2.3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{5.7.9}{1.2.3.4}\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots \dots \infty$$

$$\therefore\ 3.S = \frac{3.5}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3.5.7}{\underline{|3}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots \infty.$$

$$\therefore\ 3.S + \left[1 + \frac{3}{\underline{|1}}\cdot\frac{1}{3}\right] = 1 + \frac{3}{\underline{|1}}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3.5}{\underline{|2}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3.5.7}{\underline{|3}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots \infty.$$

$$3.S + \left[1 + \frac{3}{\underline{|1}}\cdot\frac{1}{3}\right] = (1-x)^{-p/q}$$

இங்கு $p = 3;\ q = 2;\ \frac{x}{q} = \frac{1}{3}\quad \therefore\ x = \frac{2}{3}.$

$$\therefore\ 3.S + 2 = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} = (3)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore\ 3.S = 3^{\frac{3}{2}} - 2.$$

$$\therefore\ S = \frac{1}{3}\,[3^{\frac{3}{2}} - 2].$$

6. $$S = \frac{3}{2.4} + \frac{3.4}{2.4.6} + \frac{3.4.5}{2.4.6.8} + \dots \dots \infty$$

$$2.S = \frac{2.3}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2.3.4}{\underline{|3}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2.3.4.5}{\underline{|4}}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots \dots \infty$$

$$2.S + \left[1 + \frac{2}{\underline{|1}}\cdot\frac{1}{2}\right] = 1 + \frac{2}{\underline{|1}}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2.3}{\underline{|2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2.3.4}{\underline{|3}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots \infty$$

$= (1-x)^{-p/q}$. இங்கு,

$$p = 2;\ q = 1;\ \frac{x}{q} = \frac{1}{2}. \qquad \therefore\ x = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore\ 2S + \left[1 + \frac{2}{|\underline{1}} \cdot \frac{1}{2}\right] = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2$$

$$2S + [1 + 1] = 4.$$

$$2S = 4 - 2 = 2.$$

$$\therefore\ S = 1.$$

7. $$S = 1 + \frac{10}{9} + \frac{10.16}{9.18} + \frac{10.16.22}{9.18.27} + \dots \dots \infty$$

$$= 1 + \frac{10}{|\underline{1}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right) + \frac{10.16}{|\underline{2}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{10.16.22}{|\underline{3}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \dots \dots \infty$$

$= (1-x)^{-p/q}$ உடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்போது

$$p = 10;\quad q = 6;\quad \frac{x}{q} = \frac{1}{9} \qquad \therefore\ x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore\ S = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-\frac{10}{6}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{5}{3}} = (3)^{\frac{5}{3}}$$

$$S = 3 \cdot \sqrt[3]{9}$$

8. $$S = \frac{5}{|\underline{2}} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{5.8}{|\underline{3}}\left(\frac{1}{12}\right)^3 + \frac{5.8.11}{|\underline{4}}\left(\frac{1}{12}\right)^4 + \dots \quad \dots \quad \infty$$

$$2.S = \frac{2.5}{|\underline{2}} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{2.5.8}{|\underline{3}}\left(\frac{1}{12}\right)^3 + \frac{2.5.8.11}{|\underline{4}}\left(\frac{1}{12}\right)^4 + \dots \quad \infty$$

இரண்டு பக்கங்களிலும் $1 + \frac{2}{\underline{|1}} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)$ ஐக் கூட்ட

$$2.S + \left[1 + \frac{2}{\underline{|1}} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)\right] = 1 + \frac{2}{\underline{|1}} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)$$

$$+ \frac{2.5}{\underline{|2}} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{2.5.8}{\underline{|3}} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^3 + \ldots \infty$$

$= (1-x)^{-p/q}$ ஆனால்,

$p = 2;\ q = 3;\ \frac{x}{q} = \frac{1}{12} \qquad \therefore\ x = \frac{1}{4}.$

$$\therefore\ 2.S + \left[1 + \frac{2}{\underline{|1}} \cdot \frac{1}{12}\right] = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$2.S + \left[1 + \frac{1}{6}\right] = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$2S = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{7}{6}$$

$$S = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{7}{6}\right].$$

பல்வேறு எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 11 :

$\frac{x^2}{(x-1)(2x-1)}$ ஐ x-ன் படிகள் ஏறு வரிசையில் வருமாறு விரித்தெழுதுக. அவ்விரிவில் x^n-ன் கெழு காண்க. x-ன் எம் மதிப்புகளுக்கு இவ்விரிவு உண்மையாகும் எனக் காண்க.

$\frac{x^2}{(x-1)(2x-1)}$ ஒரு தகாப் பின்னம். மேலே உள்ள கோவையும் கீழே உள்ள கோவையும் சம படி உள்ளனவாக இருப்பதால் முதலில் நாம் x^2ஐ, $(x-1)(2x-1)$ ஆல் வகுக்க வேண்டும்.

$$\therefore \quad \frac{x^2}{(x-1)(2x-1)} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}{(x-1)(2x-1)}.$$

இப்பொழுது $\dfrac{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}{(x-1)(2x-1)}$ என்பது ஒரு தகு பின்னமாகும். அதைப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிப்போம்.

$$\frac{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}{(x-1)(2x-1)} \equiv \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(2x-1)} \text{ என்க.}$$

$x = 1$ என்று பிரதியிடுக : $A = 1$.

$x = \frac{1}{2}$,, $B = -\frac{1}{2}$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{(x-1)(2x-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(x-1)} - \frac{\frac{1}{2}}{(2x-1)}$$

$$= \tfrac{1}{2} - (1-x)^{-1} + \tfrac{1}{2}(1-2x)^{-1}$$

$$= \tfrac{1}{2} - [1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \infty] + \tfrac{1}{2}[1 + (2x) + (2x)^2 + \dots \dots (2x)^n + \dots \infty)$$

$\therefore$ x^n-ன் கெழு $= -1 + \frac{1}{2}.2^n = 2^{n-1} - 1$

ஈருறுப்புத் தேற்றக் கட்டுப்பாட்டின்படி $|x| < 1$; $|2x| < 1$ அதாவது $|x| < \frac{1}{2}$ என்ற மதிப்புக்கு இவ்விரிவு உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 12 :

n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாயின்

$$n - \frac{n(n^2-1^2)}{\lfloor 1 . \lfloor 2} + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{\lfloor 2 . \lfloor 3} + \dots \dots$$

$$+ \frac{(-1)^r (n^2-1^2)\dots(n^2-r^2)}{\lfloor r \; \lfloor r+1} + \dots\dots = (-1)^{n+1} \text{ என்று}$$

நிறுவுக.

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3} x^3 \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} x^{n-2} + (-1)^{n-1} n.x^{n-1}$$

$$+ (-1)^n x^n \dots \dots (A)$$

$|x| < 1$ ஆனால்,

$$(1-x)^{-(n+1)} = 1 + (n+1)x + \frac{(n+1)(n+2)}{\underline{|2}}x^2 + \dots \dots (B)$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ளதை

$$S = n - \frac{n(n^2-1^2)}{\underline{|1} \cdot 2} + n\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{\underline{|2} \cdot 3} \dots \text{ என்று}$$

கொண்டால்

$(-1)^{n-1} S = (A)$, (B)-ன் பெருக்கற் தொகை விரிவில் x^{n-1}-ன் கெழுவாகும்.

$\therefore$ $(-1)^{n-1} S = (1-x)^n \times (1-x)^{-(n+1)}$-ன் விரிவில் x^{n-1}-ன் கெழுவாகும்.

$= (1-x)^{-1}$-ன் விரிவில் x^{n-1}-ன் கெழு.

$= 1.$

$$\therefore \quad S = \frac{1}{(-1)^{n-1}} = (-1)^{n+1}$$

$$\therefore \quad n - \frac{n(n^2-1^2)}{\underline{|1} \cdot \underline{|2}} + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{\underline{|2} \cdot \underline{|3}} + \dots \dots \dots + \frac{(-1)^r (n^2-1^2) \dots (n^2-r^2)}{\underline{|r} \; \underline{|r+1}} \dots \dots = (-1)^{n+1}$$

எடுத்துக்காட்டு 13 :

$\dfrac{x}{(1+2x)^2(1-3x)}$-ன் படிகள் ஏறு வரிசையில் வருமாறு விரித்தெழுதுக. இவ்விரிவில் x^n-ன் கெழு காண்க. x-ன் எம் மதிப்புகளுக்கு இவ்விரிவு உண்மையாகும் ?

$$\frac{x}{(1+2x)^2(1-3x)} = \frac{A}{(1+2x)} + \frac{B}{(1+2x)^2} + \frac{C}{1-3x}$$

எனப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்தால்,

$$A = \frac{2}{25}, \; B = -\frac{1}{5}, \; C = \frac{3}{25}$$

எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{x}{(1+2x)^2(1-3x)} = \frac{2}{25}\cdot\frac{1}{(1+2x)} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(1+2x)^2} + \frac{3}{25}\cdot\frac{1}{1-3x}$$

$$= \frac{2}{25}(1+2x)^{-1} - \frac{1}{5}(1+2x)^{-2} + \frac{3}{25}(1-3x)^{-1}$$

$$= \frac{2}{25}[1-2x+(2x)^2 - \dots + (-1)^n(2x)^n + \dots \dots \infty]$$

$$- \frac{1}{5}[1-2(2x)+3(2x)^2+\dots + (n+1)(-1)^n(2x)^n + \dots \dots \infty]$$

$$+ \frac{3}{25}[1+3x+(3x)^2+\dots+(3x)^n+\dots\dots\infty]$$

x^n-ன் கெழு $= \frac{2}{25}(-1)^n 2^n - \frac{1}{5}(n+1)(-1)^n(2)^n + \frac{3}{25}3^n$, ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் கட்டுப்பாட்டின்படி,

$|2x|<1; \ |3x|<1$ அதாவது $|x| < \frac{1}{3}$.

எடுத்துக்காட்டு 14 :

$\frac{(1-3x)^n}{1-x}$ என்ற விரிவில் முதல் $(n+r)$ உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகை $(-1)^n(2r-n)2^{n-1}$ என நிறுவுக.

$f(x)$ என்ற விரிவில் $(n+r)$ உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகை

$= \frac{f(x)}{1-x}$ என்ற விரிவில் x^{n+r-1}-ன் கெழுவாகும்.

$= \frac{(1-3x)^n}{(1-x)^2}$-ன் விரிவில் x^{n+r-1}-ன் கெழு.

$$(1-3x)^n = (1-x-2x)^n = (1-x)^n + {}^nc_1(1-x)^{n-1}(-2x) \dots \dots + {}^nc_1(1-x)(-2x)^{n-1} + (-2x)^n$$

$$\therefore \quad \frac{(1-3x)^n}{(1-x)^2} = (1-x)^{n-2} + \dots + {}^nc_3(1-x)(-2x)^{n-2} + {}^nc_1\frac{n(-2)^{n-1}}{1-x}x^{n-1} + \frac{(-2)^n x^n}{(1-x)^2}$$

x^{n+r-1}-ன் கெழு கடைசி இரண்டு உறுப்புகளில்தான் உள்ளது.

$$\therefore \quad x^{n+r-1}\text{-ன் கெழு} = n(-2)^{n-1} + (-1)^n 2^n r$$
$$= (-1)^n 2^{n-1}[2r - n]$$

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$\dfrac{n+1}{(x-1)^2(2x+3)}$ ஐ x-ன் படிகள் ஏறு வரிசையில் வருமாறு விரித்தெழுதி, அப்பிரிவில் x^n-ன் கெழுவைக் காண்க. x-ன் எம் மதிப்புகளுக்கு இப்பிரிவு உண்மையாகும் ?

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(2x+3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(2x+3)} \text{ ஆனால்}$$
$$x+1 \equiv A(x-1)(2x+3) + B(2x+3) + C(x-1)^2$$

தீர்வு கண்டால் $A = \dfrac{1}{25}$, $B = \dfrac{2}{5}$, $C = -\dfrac{2}{25}$

$$\therefore \quad \frac{(x+1)}{(x-1)^2(2x+3)} = \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{25}\cdot\frac{1}{(2x+3)}$$

$$= -\frac{1}{25}\left[(1-x)^{-1}\right] + \frac{2}{5}\left[(1-x)^{-2}\right] - \frac{2}{75}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{-1}$$

$$= -\frac{1}{25}(1+x+x^2+\dots) + \frac{2}{5}(1+2x+3x^2+\dots)$$
$$-\frac{2}{75}\left[1 + \left(-\frac{2}{3}x\right) + \left(-\frac{2}{3}x\right)^2 + \dots + \left(-\frac{2}{3}x\right)^n + \dots\right]$$

$$x^n\text{-ன் கெழு} = -\frac{1}{25} + \frac{2}{5}(n+1) - \frac{2}{75}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

ஈருறுப்புத் தேற்றக் கட்டுப்பாட்டின்படி

$$|x| < 1; \quad |x| < \frac{3}{2}.$$

அதாவது $|x| < 1$ மதிப்புக்கு உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 16 :

$\dfrac{1}{1-x-6x^2}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்து,

$$1 + (n-1)\,6 + \frac{(n-2)(n-3)}{\underline{|2}} \cdot 6^2 + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{\underline{|3}}\,6^3 + \dots \quad \dots$$

$$= \frac{1}{5}\left\{ 3^{n+1} + (-1)^n\, 2^{n+1} \right\}$$ எனக் காண்பி.

$$\frac{1}{1-x-6x^2} = \frac{1}{(1-3x)\,(1+2x)}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(1-3x)\,(1+2x)} = \frac{A}{(1-3x)} + \frac{B}{(1+2x)}$$

$x = \frac{1}{3}$ என்று பிரதியிடுக. $\quad A = \frac{3}{5}$

$x = -\frac{1}{2} \quad$,, $\quad B = \frac{2}{5}$.

$$\therefore \quad \frac{1}{1-x-6x^2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{(1-3x)} + \frac{2}{5}\,\frac{1}{(1+2x)}$$

$$= \frac{3}{5}\,(1-3x)^{-1} + \frac{2}{5}\,(1+2x)^{-1}$$

$$= \frac{3}{5}\,[1 + (3x) + (3x)^2 + \dots + (3x)^n + \dots]$$

$$+ \frac{2}{5}\,[1 - 2x + (2x)^2 + \dots + \dots (-2x)^n + \dots]$$

x^n-ன் கெழு $= \dfrac{2}{5} \cdot 3^n + \dfrac{2}{5}\,(-2)^n$

$$= \frac{1}{5}\,[3^{n+1} + (-1)^n\, 2^{n+1}] \dots \quad \dots \qquad (A)$$

$$\frac{1}{1-x-6x^2} = [1 - x\,(1+6x)]^{-1}$$

$$= 1 + x\,(1+6x) + x^2\,(1+6x)^2 + \dots \quad \dots$$
$$+ x^n\,(1+6x)^n + \dots \quad \dots$$

$x^n\,(1+6x)$ என்ற உறுப்பிற்குப் பின்பு x^n-ன் கெழு இல்லை,

$\therefore$ $x^n(1+6x)^n$-ல் x^n-ன் கெழு $= 1$.

$x^{n-1}(1+6x)^{n-1}$-ல் x^n-ன் கெழு $= \frac{n-1}{6} \cdot 6$.

$x^{n-2}(1+6x)^{n-2}$-ல் x^n-ன் கெழு $= \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} \cdot 6^2$

$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$

$$\therefore \frac{1}{1-x-6x^2}\text{-ல் } x^n\text{-ன் கெழு} = 1 + \frac{(n-1)}{1} \cdot 6 + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} 6^2 + \ldots \ldots \quad (B)$$

A, B-இலிருந்து

$$1 + (n-1)6 + \frac{(n-2)(n-3)}{|2} 6^2 + \ldots = \frac{1}{5}\left[3^{n+1} + (-1)^n 2^{n+1}\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 17 :

$\frac{x^2-7x+2}{(3-2x)(1+x)^2} = \frac{A}{3-2x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{(1+x)^2}$ என்று பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்து, x^n-ன் கெழுவைக் காண்க. x-ன் எம்மதிப்புக்கு இவ்விரிவு உண்மையாகும்?

$$\frac{x^2-7x+2}{(3-2x)(1+x)^2} = \frac{A}{(3-2x)} + \frac{B}{(1+x)} + \frac{C}{(1+x)^2}$$

$$\therefore \quad x^2-7x+2 = A(1+x)^2 + B(1+x)(3-2x) + C(3-2x)$$

இதன் தீர்வு $A = -1$, $B = -1$, $C = 2$.

$$\therefore \frac{x^2-7x+2}{(3-2x)(1+x)^2} = \frac{-1}{3-2x} - \frac{1}{1+x} + \frac{2}{(1+x)^2}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(1-\frac{2x}{3}\right)^{-1} - (1+x)^{-1} + 2(1+x)^{-2}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[1 + \frac{2x}{3} + \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \ldots \left(\frac{2x}{3}\right)^n + \ldots\right]$$

$$-[1-x+x^2 - \ldots \ldots (-x)^n + \ldots \ldots]$$

$$+ 2[1-2x+3x^2 \ldots \ldots (n+1)(-x)^n + \ldots \ldots]$$

$$\therefore \quad x^n\text{-ன் கெழு} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2^n}{3^n} - (-1)^n + 2(-1)^n(n+1).$$

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் கட்டுப்பாட்டின்படி $\left|\frac{2}{3}x\right| < 1$, $|x| < 1$

$\therefore \quad |x| < 1$ என்ற மதிப்புக்கு உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 18 :

n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணுகில், $(-1)^n = 1 - \frac{n(n+1)}{1.2}$ $+ \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{1^2.2^2} - \dots\dots (n+1)$ உறுப்புகள் என நிறுவுக. (n கூட்டு முழு எண்)

$|x| < 1$ ஆனல் $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2$ $+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \dots + x^n$ (n கூட்டு முழு எண்).

$$(1+x)^{-n-1} = (1+x)^{-(n-1)} = 1 - (n+1)x + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}x^2 + \dots\dots \infty \quad (B)$$

$\therefore \quad (1+x)^n(1+x)^{-n-1} = \frac{1}{1+x} = (A)\,(B)$-ன் பெருக்குத் தொகை.

இரு பக்கங்களிலும் x^n-ன் கெழுவைச் சமன் செய்தால்,

$(-1)^n = x^n$-ன் கெழு $\left(\frac{1}{1+x}\right)$ இலிருந்து $= (1+x)^{-1}$-ல் x^n-ன் கெழு

$$= \left[1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \dots + x^n\right]\left[1 - (n+1)x + \frac{(n+1)(x+2)}{1.2}x^2 \dots\dots\right]$$

$$= 1 - \frac{n(n+1)}{1.2} + \frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}$$

$\dots\dots (n+1)$ உறுப்பு வரை.

பயிற்சி 2 (a)

1. a, b ஆகியவைகள் முறையே $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$, $(1-x)^{-\frac{3}{2}}$ -ன் r ஆவது உறுப்புகளானால் $b=(2r-1)\,a$ என்று காட்டு.

2. x கூட்டெண்ணுகில், $(1+2x)^{\frac{9}{2}}$-ல் முதல் குறை மதிப்புள்ள உறுப்பைக் கண்டுபிடி.

3. x கூட்டு மதிப்புடையதாகில், எந்த உறுப்பிலிருந்து, $(1-x)^{\frac{27}{2}}$ -என்ற விரிவில் ஓரே குறியைப் பெற்றிருக்கும்?

4. x கூட்டு மதிப்புடையதாகில் $(1-x)^{\frac{19}{2}}$ என்ற விரிவில் எந்த உறுப்பிலிருந்து கூட்டுக் குறியைப் பெற்றிருக்கும்?

5. x கூட்டு மதிப்புடையதானுல், $\dfrac{11-13x}{(1-x)^3}$ என்ற விரிவில் முதல் குறை மதிப்புள்ள உறுப்பு எது?

6. $\dfrac{19-21x}{(1-x)^3}$ என்ற விரிவின் முதல் 19 உறுப்புக்கள் கூட்டுக் குறியைப் பெற்றிருக்கும் என்று காட்டுக.

7. $x=\dfrac{2}{3}$ என்ருல் $(1+x)^{-5}$ என்ற விரிவின் மட்டளவில் மிகப் பெரிய உறுப்பு எது?

8. $x=\dfrac{3}{10}$ ஆனுல் $(1-3x)^{-\frac{3}{2}}$ என்ற விரிவின் மட்டளவில் மிகப் பெரிய உறுப்பு எது?

பின்வரும் தொடர்களின் கூட்டுத்தொகை காண்க :

9. $1-\dfrac{1}{\lfloor 1}\,\dfrac{1}{5}+\dfrac{1.4}{\lfloor 2}\cdot\dfrac{1}{5^2}-\dfrac{1.4.7}{\lfloor 3}\cdot\dfrac{1}{5^3}+\ldots\infty$

10. $1+\dfrac{5}{8}+\dfrac{5.8}{8.12}+\dfrac{5.8.11}{8.12.10}+\quad\ldots\quad\ldots\quad\infty$

11. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{3.5}{4.8}+\dfrac{3.5.7}{4.8.12}+\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\infty$

12. $\frac{4}{2.4} + \frac{4.5}{2.4.6} + \frac{4.5.6}{2.4.6.8} + \quad \dots \quad \dots \quad \infty$

13. $\frac{1}{2.4.6} + \frac{1.3}{2.4.6.8} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.10} + \quad \dots \quad \infty$

14. $1 + \frac{3}{4} + \frac{3.5}{4.8} + \frac{3.5.7}{4.8.12} + \quad \dots \quad \dots \quad \infty$

15. $\frac{1}{6} + \frac{1.4}{6.12} + \frac{1.4.7}{6.12.18} + \quad \dots \quad \dots \quad \infty$

16. $\frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \quad \dots \quad \dots \quad \infty$

17. $1 + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{2.5}{1.2} \cdot \frac{1}{3^4} + \frac{2.5.8}{1.2.3} \cdot \frac{1}{3^6} + \dots \quad \infty$

18. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} - \frac{1.3.5}{4.8.12} + \quad \dots \quad \dots \quad \infty$

19. $1 - \frac{1}{6} + \frac{1.3}{6.12} - \frac{1.3.5}{6.12.18} + \quad \dots \quad \infty$

20. $\frac{3.5}{3.6} + \frac{3.5.7}{3.6.9} + \frac{3.5.7.9}{3.6.9.12} + \quad \dots \quad \dots \quad \infty$

21. $\frac{5}{3.6} + \frac{5.7}{3.6.9} + \frac{5.7.9}{3.6.9.12} + \quad \dots \quad \infty$

22. $\frac{1}{4} + \frac{1.5}{4.8} + \frac{1.5.7}{4.8.12} + \frac{1.5.7.9}{4.8.12.16} + \dots \dots \infty$

23. $\frac{1}{6} + \frac{5}{6.12} + \frac{5.8}{6.12.18} + \frac{5.8.11}{6.12.18.24}$

$+ \dots \dots \dots \infty$

24. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3.6} + \frac{1.3}{3.6.9} + \frac{1.3.5}{3.6.9.12} + \dots \quad \dots \infty$

பயிற்சி 2 (b)

கீழ்க்கண்டவற்றின் விரிவுகளில் x^n-ன் கெழுவைக் காண்க.

(1) $\dfrac{x+4}{x^2+5x+6}$

(2) $\dfrac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}$

(3) $\dfrac{1-x-x^2}{(1-2x)(1-x)^2}$

(4) $\dfrac{x^2+2}{(x+1)^2(x+2)(x+3)}$

(5) $\dfrac{x+4}{(x^2-4)(x+1)}$

(6) $\dfrac{x^2+2}{(x-2)(x-5)}$

(7) $\dfrac{x+4}{x^2+5x+6}$

(8) $\dfrac{x+3}{(x+2)(x-1)^3}$

(9) $\dfrac{a}{(1-x)^2} + \dfrac{b}{(2+3x)^2} = 1 + x + \ldots$ என்ருல் a, b ன் மதிப்பு என்ன ? x^n-ன் கெழுவைக் காண்க.

(10) $\dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{(a+bx)^2} = 2 + 3x + \ldots$ என்ருல் a, b-ன் மதிப்பைக் காண்க.

பயிற்சி 2 (c)

x மிகச் சிறியதாக இருப்பின், கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் தோராய மதிப்புகளைச் சரி பார்க்க :

1. $\dfrac{(9+2x)^{\frac{1}{2}}\ (3+4x)}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} = 9 + \dfrac{74}{5}x + \ldots$ தோராயமாக.

2. $\dfrac{(1-x)^{-\frac{3}{2}} - (1+x)^{\frac{3}{2}}}{6+9x} = \dfrac{x^2}{4} + \ldots$ தோராயமாக.

3. $\dfrac{(1-3x)^{-\frac{2}{3}} + (1-4x)^{-\frac{3}{4}}}{(1-3x)^{-\frac{1}{3}} + (1-4x)^{-\frac{1}{4}}} = 1 + \dfrac{3}{2}x + 4x^2 \quad \ldots$ தோராயமாக,

4. $\dfrac{a.x^b - b.x^a}{x^b - x^a} = \dfrac{1}{1-x}$ தோராயமாக.

5. $(N^5+a)^{\frac{1}{5}} = N\dfrac{5N^5+3a}{5N^5+2a}$ தோராயமாக.

6. $(1+x)^{1/n} = \dfrac{2n+(n+1)x}{2n+(n-1)x}$ தோராயமாக.

7. $\left[\dfrac{1-x}{1+n+x^2}\right]^n \simeq 1-2nx+n(2n-1)x^2$

8. $\dfrac{(1+x+x^2)\;(1+x)^2}{1-x+x^2} \simeq 1+4n+7x^2+6x^3.$

9. $\dfrac{\sqrt{1+2x+2x^2}}{1-3x} \simeq 1+4x+\dfrac{25}{2}x^2.$

10. $\sqrt{x^2+16}-\sqrt{x^2+9} = \dfrac{7}{2x}$ தோராயமாக.

பயிற்சி 2 (d)

1. $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \Sigma a_r x^r$ என்ருல்,

$a_n a_0 + a_{n-1} a_1 + a_{n-2} a_2 + \dots + a_0 a_n = 1.$

2. $|x| < 2$-க்கு $\dfrac{(1-2n)(1-3x)}{(x-2)\;(x-3)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \dots \infty$ ஆனுல்,

$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots \dots \infty = 1$ என்று காட்டு.

3. $2^n - \binom{n-1}{1} 2^{n-2} + \binom{n-2}{2} 2^{n-4} - \dots = (n+1)$ என்று காட்டு.

4. $(n+1)\,2^n - n\binom{n-1}{1} 2^{n-2} + (n-1)\binom{n-2}{2} 2^{n-4} \dots \dots = \dfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$ என நிறுவுக.

5. $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \Sigma a_r x^r$ ஆனுல்,

$a_n 2^n - a_{n-1}\binom{n-1}{1} 2^{n-2} + a_{n-2}\binom{n-2}{2} 2^{n-4} \dots \dots = 1$ என நிறுவுக.

6. $(1-x)^{-\frac{3}{2}} = \sum a_r x^r$ ஆனால்

$$a_n 2^n - a_{n-1}\binom{n-1}{1}2^{n-2} + a_{n-2}\binom{n-2}{2}2^{n-4} \dots$$
$$\dots = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ என நிறுவுக.}$$

7. $$1 - \binom{3n}{1} + \binom{3n-1}{2} - \binom{3n-2}{3} \dots \dots = (-1)^n$$
என நிறுவுக.

8. $$1 - \frac{n(n+2)}{\lfloor 1} + \frac{n(n-1)(n+2)(n+3)}{(\lfloor 2)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n+2)(n+3)(n+4)}{(\lfloor 3)^2}$$
$+ \dots (n+1)$ உறுப்புகள் $= (-1)^n (n+1)$
என நிறுவுக.

9. $$1 - \frac{n^2-1^2}{(\lfloor 1)^2} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{(\lfloor 2)^2} - \dots$$
$\dots n$ உறுப்புகள் $= (-1)^n n$ என நிறுவுக.

10. $$(n+1)+n^2+\frac{n(n^2-1^2)}{\lfloor 2} + \frac{n(n+1)(n^2-2^2)}{\lfloor 3} + \dots$$
$\dots (n+1)$ உறுப்புகள் $= \dfrac{(n+2)(n+3) \dots (2n+1)}{\lfloor n}$
என நிறுவுக.

11. $$1 - \frac{n^2}{1.2} + \frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2.2^2} - \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2.2^2.3^2}$$
$+ \dots \dots = 0$ ஆகும்.

12. $f(n) = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{2^2} + \dots n$

உறுப்புகள் ஆனால் $f(n) = 2f(n-1)$; $f(n) = 2^{n-1}$ என நிறுபி.

பயிற்சி 2 (e)

1. $\frac{(1-3x)^n}{1-x}$ -என்ற விரிவின் முதல் $(n+r)$ கெழுவின் கூட்டுத்தொகை $2^{n-1}(2r-n)$ என்று காண்பி.

2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}x^n$ என்ற பிரிவின் முதல் n உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

3. $1+n+\frac{n(n+1)}{|\underline{2}}+\frac{n(n+1)(n+2)}{|\underline{3}}+\dots\dots$

n உறுப்புகள் $=\frac{|\underline{2n-1}}{|\underline{n}\ \ |\underline{n-1}}$ எனக் காண்க.

4. $\frac{(1+x)^n}{1-x}$ -ல் முதல் $(n+r)$ கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகை $=2^n(2r+n)$ எனக் காண்பி.

5. $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^2}$ -ல் முதல் $(n+r)$ கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகை $=2^{n-3}\{n^2+n(4r+3)+4r(r+1)\}$

6. $\frac{1}{1-2x-3x^2}$ -ல் முதல் n கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகை $=\frac{1}{8}\{3^{n+1}+(-1)^{n-1}-2\}$.

3. படிக்குறித் தேற்றம்

3·1. e என்னும் எண்

நாம் எல்லை $\underset{x \to \infty}{}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ என்பது ஒரு திட்டமான எண் என்பதை III ஆம் பகுதியில் காண்போம். இத்திட்டமான எண்ணை 'e' என்று இனிக் குறிப்பிடுவோம். இவ்வெண்ணைப் 'படிக்குறி எண்' என்று கூறுவார்கள்.

3·2. படிக்குறி எல்லை

"z" என்பது எந்த ஒரு மெய்யாயினும்,

$$\text{எல்லை}_{x \to \infty} \left(1+\frac{z}{x}\right)^x = e^z. \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(அ)}$$

ஈண்டு x, $+\infty$ ஐ மெய்யெண்கள் வழி நெருங்குகின்றது.

3·3. படிக்குறித் தேற்றம்

"x"-ன் எல்லா உண்மை மதிப்புகளுக்கும்

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+ \quad \text{(ஆ)}$$

3·2. (அ), 3·3 (ஆ) - இவற்றின் மெய்ப்பாடுகள் பின்னர் III ஆம் பகுதியில் தரப்படும். இவைகளை e^x-ன் இலக்கணமாகக் கொண்டு 'e'-ன் பண்புகளைப் பற்றியும், சில தொடர்களின் தொகைகளையும் காண்போம்.

3·4. e, 2க்கும், 3க்கும் இடைப்பட்டுள்ளது

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+ \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\therefore \quad e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+ \quad \ldots \quad \ldots$$

$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$ என்னும் தொகை ஒரு நேர் மெய்யெண்ணாகும். எனவே, $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \dots + \frac{1}{n!} + \dots \dots +$ என்னும் தொகை $1 + \frac{1}{1!}$ என்னும் தொகையை விடப் பெரிதாகும்.

அதாவது, $e > 1 + \frac{1}{1!} = 2.$

எனவே, e இரண்டை விடப் பெரியதாகும்.

இனி e மூன்றைவிடச் சிறியது என்று மெய்ப்பிப்போம்.

$$\frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}$$

எனவே, $\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \dots$

$$\therefore\ 1+\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$< 1+\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$= 2+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 3$$

அதாவது $e < 3.$

எனவே e இரண்டிற்கும், மூன்றிற்கும் இடைப்பட்ட எண்ணாகும்,

3·5. e ஒரு விகிதமுறு எண்

இயலுமாயின் e ஐ $\frac{p}{q}$ என்று விகிதப்படுத்தி எழுதுவோம். ஈண்டு p-ம், q-ம் முற்றெண்கள். குறிப்பாக p-ம் q-ம் ஒன்றிற்கொன்று பகா எண்களாகும்.

$$\therefore\ \frac{p}{q} = 1+\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \dots \dots$$

இரண்டு புறமும் $q!$ ஆல் பெருக்க, நமக்குக் கிடைப்பது

$$p\,.\,(q-1)! = h+k$$

ஈண்டு $h=q!\left\{\sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!}\right\}$ & $k=q!\left\{\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{n!}\right\}$

h என்பது ஒரு முற்றெண் என்பது எளிதில் புலப்படும்.

$$\text{ஆனால் } k=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+\ \dots\ \dots\ \dots$$

$$<\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\ \dots\ \dots\ \dots$$

[∵ q ஒரு நேர் முழு எண்]

$$=\frac{1}{q+1}\div\left(1-\frac{1}{q+1}\right)=\frac{1}{q}.$$

மேலும் $k>\frac{1}{q+1}$ என்பதைக் கவனிக்க.

எனவே $\frac{1}{q+1}<k<\frac{1}{q}$. $\frac{1}{q+1}$ க்கும், $\frac{1}{q}$ க்கும் இடைப்பட்ட எண்கள் சரியான விகிதமுறு எண்களாகவும், விகிதமுறு எண்களாகவும் இருக்கலாம். எனவே k ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறு எண்ணாகவோ இருக்கலாம்.

k ஒரு விகிதமுறு எண்ணாக இருப்பின் நமது மெய்ப்பாடு முடிவுற்றது.

k ஒரு சரியான விகிதமுறு எண்ணாக இருப்பின் h ஒரு நேர் முழு எண். ஆதலால் நமக்குக் கிடைப்பது,

ஒரு நேர் முழு எண் = நேர் முழு எண் + சரியான விகிதமுறு எண், ஆகவே பொருந்தா முடிவு. எனவே $e-2\ \frac{p}{q}$ என விகிதப்படுத்தி எழுத முடியும் என்ற கொள்கை தவறானதாகும். இம்முடிவினால் 'e' ஒரு விகிதமுறு எண் என்பது விளங்குகிறது.

அதாவது e ஐ $\frac{p}{q}$ என விகிதப்படுத்தி எழுத முடியும் என்ற கொள்கை தவறானதாகும். இம் முடிவினால் 'e' ஒரு விகிதமுறு எண் என்பது விளங்குகிறது.

குறிப்பு : 'e'ன் தோராய மதிப்பு 2·7183. இம்மதிப்பு நான்கு தசமத்தானத்திற்குச் சரியானதாகும்.

3·6. சில இன்றியமையாத வாய்பாடுகள்

(i) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = 1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+ \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

(ii) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2} = x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+ \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

(iii) $\dfrac{e+\dfrac{1}{e}}{2} = 1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{4!}+ \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

(iv) $\dfrac{e-\dfrac{1}{e}}{2} = 1+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}+ \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

3·7. $a>0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் a^x-ன் விரிவம்

$a^x = e^{x \log a}$ என்று எழுதுவதைக் கவனிக்க.

எனவே $a^x \equiv 1+(x \log a)+\dfrac{(x \log a)^2}{2!}+\dots+\dfrac{(x \log a)^n}{n!}+\dots$

3·71. a, x-இவற்றின் எல்லா மெய்யெண் மதிப்புகளுக்கும்,

$$e^{ax} = 1+\frac{ax}{\underline{|1}}+\frac{(ax)^2}{\underline{|2}}+\frac{(ax)^3}{\underline{|3}}+\dots \quad \dots \quad \infty$$

எனக் கிடைக்கும்.

3·8. தொடர்களின் தொகை காணல் :

நாம் மேலே கண்ட வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்திச் சில வகைத் தொடர்களின் தொகைகளை இப்பகுதியில் கண்டுபிடிப்போம். சில எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் தொகை காணும் வழியை விளக்கு வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\dfrac{2}{3!}+\dfrac{4}{5!}+\dfrac{6}{7!}+\dots\dots = e^{-1}$ என்று காட்டுக.

$S \equiv \dfrac{2}{3!}+\dfrac{4}{5!}+\dfrac{6}{7!}+\dots\dots$ என்று குறிப்பிடுக.

இத்தொடரின் n-ஆவது உறுப்பினை t_n என்று குறிக்க.

எனவே $t_n = \dfrac{2n}{(2n+1)!} = \dfrac{2n+1-1}{(2n+1)!} = \dfrac{1}{2n!} - \dfrac{1}{(2n+1)!}$

எனவே $t_1 = \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!}$

$t_2 = \dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!}$

இவைகளைக் கூட்டும்போது நமக்குக் கிடைப்பது

$$S = \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots\right) - \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \ldots\ldots\right)$$

$$= \left\{\frac{e+e^{-1}}{2} - 1\right\} - \left\{\frac{e-e^{-1}}{2} - 1\right\}$$

$$= e^{-1}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n+1}{(2n+1)!} = \frac{e}{2} + \frac{2}{e}$$ என்று காட்டுக.

இடக் கைப்புறம்

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{(2n+1)!}.$$

$$S \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{(2n+1)!}$$

எனக் கொள்க.

இத் தொடரின் n-ஆவது உறுப்பு $= \dfrac{5n+1}{(2n+1)!}$

$$= \frac{\frac{5}{2}(2n+1) - \frac{3}{2}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{\frac{5}{2}}{2n!} - \frac{\frac{3}{2}}{(2n+1)!}$$

எனவே முதலுறுப்பு $= \dfrac{\frac{5}{2}}{2!} - \dfrac{\frac{3}{2}}{3!}$

இரண்டாமுறுப்பு $= \dfrac{\frac{5}{2}}{4!} - \dfrac{\frac{3}{2}}{5!}$

$$\begin{matrix} \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \end{matrix}$$

இவைகளைக் கூட்ட, நமக்குக் கிடைப்பது,

$$S = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots\right)$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{e + e^{-1}}{2} - 1\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{e - e^{-1}}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{e}{2} + \frac{2}{e} - 1$$

எனவே $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n+1}{(2n+1)!} = 1 + \frac{e}{2} + \frac{2}{e} - 1$

$$= \frac{e}{2} + \frac{2}{e} = \text{வ. கை. பு.}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$(x+1)e^x \equiv \frac{1}{1!} + \frac{1+3}{2!}x + \frac{1+3+5}{3!}x^2 + \frac{1+3+5+7}{4!}x^3 + \dots \dots \infty$$

எனக் காண்க.

வலக் கைப்புறத் தொடரின் n ஆவது உறுப்பு

$$= \frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots n \text{ உறுப்புகள்}}{n!} x^{n-1}$$

$$= \frac{\frac{n}{2}\left(2 + \overline{n-1}\,2\right)}{n!} x^{n-1}$$

$$= \frac{n^2}{n!} x^{n-1}$$

$$= \frac{n}{(n-1)!} x^{n-1}$$

$$= \frac{(n-1+1)}{(n-1)!} x^{n-1}$$

$$= \frac{x^{n-1}}{(n-2)!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

எனவே, முதலுறுப்பு $= 0 + 1$

2ஆம் உறுப்பு $= x + \frac{x}{1!}$

3ஆம் உறுப்பு $= \frac{x^2}{1!} + \frac{x^2}{2!}$

4ஆம் உறுப்பு $= \frac{x^3}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

இவைகளைக் கூட்ட நமக்குக் கிடைப்பது

$$\frac{1}{1!} + \frac{1+3}{2!} x + \frac{1+3+5}{3!} x^2 + \dots \infty$$

$$= \left(x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \dots \right) + \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right)$$

$$= x \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) + \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \right)$$

$= xe^x + e^x$

$= (x+1) e^x =$ இ. கை. பு.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$\frac{1^3}{1!} + \frac{1^3+2^3}{2!} + \frac{1^3+2^3+3^3}{3!} + \dots \infty$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1^2 \cdot 2^2}{1!} + \frac{2^2 \cdot 3^2}{2!} + \frac{3^2 \cdot 4^2}{3!} + \dots \infty\right)$$

என்று காட்டுக. இரண்டும் $\frac{27}{4}$ e-க்குச் சமம் என்பதை மெய்ப்பிக்க,

$$\frac{1^3}{1!} + \frac{1^3+2^3}{2!} + \frac{1^3+2^3+3^3}{3!}$$
$$+ \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^3+2^3+\dots+n^3}{n!}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4\,n!}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1^2 \cdot 2^2}{1!} + \frac{2^2 \cdot 3^2}{2!} + \frac{3^2 \cdot 4^2}{3!} + \dots \infty\right)$$

இனி $\frac{1^3}{1!} + \frac{1^3+2^3}{2!} + \frac{1^3+2^3+3^3}{3!} + \dots \infty = S$ என்க.

$$\therefore \quad S = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{n!} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)^2}{(n-1)!}$$

$$n(n+1)^2 = a(n-1)(n-2)(n-3) + b(n-1)(n-2) + c(n-1) + d.$$

$n = 1$ என்று வைப்பின்

$$4 = d.$$

$n = 2$ என்று வைப்பின்

$$24 = c + d.$$

$$\therefore \quad c = 20$$

$n = 3$ என்று வைப்பின்

$$48 = 2b + 2c + d$$

$$\therefore \quad b = 2$$

n^3ன் கெழுக்களை ஒப்பிட்டுப்பார்க்குமிடத்தான்

$a = 1.$

எனவே $n(n+1)^2 = (n-1)(n-2)(n-3)$
$+ 2(n-1)(n-2) + 20(n-1) + 4.$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)^2}{(n-1)!}$-ன் n ஆவது உறுப்பு $= \frac{n(n+1)^2}{(n-1)!}$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3) + 2(n-1)(n-2) + 20(n-1) + 4}{(n-1)!}$$

$$= \frac{1}{(n-4)!} + \frac{2}{(n-3)!} + \frac{20}{(n-2)!} + \frac{4}{(n-1)!}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)^2}{(n-1)!} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-4)!} + 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!}$$

$$+ 20\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

$$= e + 2e + 20e + 4e$$

$$= 27e.$$

$$\therefore S = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)^2}{(n-1)!} = \frac{27e}{4}.$$

எடுத்துக்காட்டு 5:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$-ன் தொகை காண்க.

தொடரின் n ஆவது உறுப்பு n^4 ஆகும்.

$n^4 = an(n-1)(n-2)(n-3) + bn(n-1)(n-2) + cn(n-1) + dn + e'$ என்று எழுதுக.

$n = 0$ என்று வைத்தால் $e' = 0$

$n = 1$,, $d = 1$

$n = 2$,, $2c + 2d = 16$

$c + d = 8$

$c = 7$

$n = 3$,, $6b + 6c + 3d = 18$

$2b + 2c + d = 27$

$2b = 27 - 1 - 14$

$= 12$

$b = 6.$

n^4-ன் கெழுக்களைச் சமமிட்டுப் பார்க்கின்,

$a = 1.$

எனவே $n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n(n-1)(n-2) + 7n(n-1) + n.$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n(n-1)(n-2) + 7n(n-1) + n}{n!}$$

$$= \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-4)!} + 6 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!}$$

$$+ 7 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

$$= e + 6e + 7e + e$$

$$= 15e.$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{(n+3)\,n!} = \frac{1}{3}(43-15e) \text{ என்று காட்டுக.}$$

கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் n ஆவது உறுப்பு

$$= \frac{(2n-1)}{(n+3)\,n!}$$

$$= \frac{(2n-1)(n+2)(n+1)}{(n+3)!}$$

$$(2n-1)(n+2)(n+1) \equiv a(n+3)(n+2)(n+1) + b(n+3)(n+2) + c(n+3) + d$$ என எழுதுக.

$n = -3$ என்று nக்கு மதிப்பேற்ற

$$-7 \cdot -1 \cdot -2 = d \qquad \therefore\ d = -14.$$

$n = -2$ என்று மதிப்பேற்ற

$$0 = c + d \qquad \therefore\ c = 14.$$

$n = -1$ என்று மதிப்பேற்ற

$$0 = 2b + 2c + d \qquad \therefore\ b = -\frac{1}{2}(28 + (-14)) = -7.$$

n^3-ன் கெழுக்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கின்

$$a = 2.$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{(n+3)\,n!} \text{-ன் } n \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$$= \frac{2}{n!} - \frac{7}{(n+1)!} + \frac{14}{(n+2)!} - \frac{14}{(n+3)!}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{(n+3)\,n!} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$-7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} + 14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!}$$

$$-14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)!}$$

$$= 2(e-1) - 7\left(e-1-\frac{1}{1!}\right) + 14\left(e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)$$

$$-14\left(e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)$$

$$= -5e + \frac{43}{3} = \frac{1}{3}(43-15e).$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$$\frac{1^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} \cdot (\log 2) + \frac{5^2}{3!}(\log 2)^2 + \dots \dots = 8 \log 2$$

$$+ \frac{1}{\log 2} \text{ என்று காட்டுக.}$$

$\log 2 = x$ என்று கொள்க. எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர் $\frac{1^2}{1!} + \frac{3^2}{2!}x + \frac{5^2}{3!}x^2 + \dots$ என்ற வடிவம் கொள்கின்றது.

இத் தொடரின் n ஆவது உறுப்பு

$$= x^{n-1}\frac{(2n-1)^2}{n!} = \frac{4n(n-1)+1}{n!} \cdot x^{n-1}$$

$$= \left\{\frac{4}{(n-2)!} + \frac{1}{n!}\right\} x^{n-1}$$

$$\therefore \frac{1^2}{1!} + \frac{3^2}{2!}x + \dots = 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

$$= 4x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= 4x \cdot e^x + \frac{1}{x} \cdot (e^x - 1)$$

$$= 4 \log 2 \cdot e^{\log 2} + \frac{1}{\log 2} \cdot e^{\log 2} - \frac{1}{\log 2}$$

$$= 4 \cdot \log 2 \cdot 2 + \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{\log 2}$$

$$= 8 \log 2 + \frac{1}{\log 2}$$

3·9. விரிவங்களும் சில முற்றொருமைகளும்

படிக்குறித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திச் சில சார்புகளை x-ன் படிகளில் விரிக்கலாம். கீழே சில எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் மேற் கொள்ளும் வழிநிலைகளைத் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$\frac{a-bx+cx^2}{e^x}$ என்ற சார்பினை x-ன் படிகளில் விரித்து x^n-ன் கெழுவினைக் காண்க.

$$\frac{a - bx + cx^2}{e^x} = (a - bx + cx^2)e^{-x}$$

$$= (a-bx+cx^2)\left\{1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right\}$$

$$= a\left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots\right)$$

$$-b\left(x - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} - \dots\right)$$

$$+c\left(x^2 - \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots\right)$$

எனவே x^n-ன் கெழு

$$= a\frac{(-1)^n}{n!} - b \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + c \cdot \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}\left\{cn^2 + (b-c)\,n + a\right\}$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$\dfrac{e^{5x}+e^{x}}{e^{3x}}$ என்ற சார்பினை x-ன் படிகளில் விரித்தால்,

$$x^n\text{-ன் கெழு} = \begin{cases} \dfrac{2^{n+1}}{n!} \ldots n \text{ இரட்டைப் படை எண்ணுயிருப்பின்} \\ 0 \ \ldots n \text{ ஒற்றைப் படை எண்ணுயிருப்பின்} \end{cases}$$

என்று மெய்ப்பாடு செய்க.

$$\frac{e^{5x}+e^{x}}{e^{3x}} = e^{2x}+e^{-2x} = 2\left\{1+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+\ldots \right.$$
$$\left. \ldots+\frac{(2x)^{2n}}{2n!}+\ldots\right\}.$$

எனவே n இரட்டைப்படை எண்ணுயிருந்தால் மேற்கண்ட விரிவத்தில்,

$$x^n \text{ உள்ள உறுப்பு} = 2.\ \frac{2^n}{n!}\,x^n = \frac{2^{n+1}}{n!}\,.\,x^n$$

ஆனுல் n ஒற்றைப்படை எண்ணுயிருந்தால்,

x^n உள்ள உறுப்பு $= 0.\ x^n$ ஆகும்.

[$\because$ விரிவத்தில் $x, x^3, x^5, \ldots$ உறுப்புகள் இல்லை.]

எனவே,

$$x^n\text{-ன் கெழு} = \begin{cases} \dfrac{2^{n+1}}{n!} \ldots n \text{ இரட்டைப்படைஎண்ணுயிருப்பின்} \\ 0 \ldots n \text{ ஒற்றைப்படை எண்ணுயிருப்பின்.} \end{cases}$$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$\dfrac{a+bx}{e^x}$-ன் விரிவத்தில் x^n-ன் கெழுவினைக் காண்க. விரிவத்தில் x^4-ன் கெழு ஒன்றுகவும், x^{10} உறுப்பு இல்லாமலும் இருக்குமாயின் a, b-ன் மதிப்புகளைக் கண்டறிக.

$$\frac{a+bx}{e^x} = (a+bx)\,e^{-x} = ae^{-x}+bx\,e^{-x}$$

$$= a\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}+bx\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a \frac{x^n}{n!} + b \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a \frac{x^n}{n!} + b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

எனவே,

$n \geqslant 1$ ஆக இருக்கும்போது x^n-ன் கெழு

$$= \frac{a(-1)^n}{n!} + \frac{b(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$n = 4$ ஆக இருப்பின் x^4-ன் கெழு

$$= \frac{a(-1)^4}{4!} + \frac{b(-1)^3}{3!}$$

$$= \frac{a}{24} - \frac{b}{6}$$

$n = 10$ ஆக இருக்கும்போது x^{10}-ன் கெழு

$$= \frac{a}{10!} - \frac{b}{9!}$$

ஆனால் x^4ன் கெழு 1 என்றும் x^{10}-ன் கெழு 0 என்றும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே $1 = \frac{a}{24} - \frac{b}{6}$

$$0 = \frac{a}{10!} - \frac{b}{9!}$$

இச்சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க, நமக்குக் கிடைப்பன

$$a = 40, \ b = 4.$$

எடுத்துக்காட்டு 11 :

$n^n - {}^nc_1 (n+2)^n + {}^nc_2 (n+4)^n \ldots (n+1)$ உறுப்புகள் வரை $= (-2)^n n!$

$\frac{n^n}{n!}$ என்பது e^{nx}-ன் விரிவத்தில் x^n-ன் கெழுவாகும்.

$\frac{(n+2)^n}{n!}$ என்பது $e^{(n+2)x}$-ன் ,, ,,

$\frac{(n+4)^n}{n!}$ என்பது $e^{(n+4)x}$-ன் ,, ,,

எனவே $\frac{1}{n!}[n^n - {}^nc_1\,(n+2)^n + {}^nc_2\,(n+4)^n \ldots (n+1)$ உறுப்புகள்]

$= \{ e^{nx} - {}^nc_1\, e^{(n+2)x} + {}^nc_2\, e^{(n+4)x} \ldots (n+1)$ உறுப்புகள் $\}$

விரிவத்தில் x^n-ன் கெழுவாகும்.

அதாவது $\frac{1}{n!}[n^n - {}^nc_1\,(n+2)^n + \ldots]$

$= e^{nx}[1 - {}^nc_1\, e^{2x} + {}^nc_2\, e^{4x} - \ldots (n+1)$ உறுப்புகள்]-ன் விரிவத்தில் x^n-ன் கெழுவாகும்.

$= e^{nx}(1-e^{2x})^n$,,

[ஈருறுப்புத் தேற்றப்படி]

$$= e^{nx}\left\{ -\frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} - \ldots \right\}^n$$ -ன் விரிவத்தில் x^n-ன் கெழுவாகும்.

$$= (-2)^n x^n e^{nx}\left\{ 1 - \frac{(2x)}{2!} + \ldots \right\}^n \quad ,,$$

$$= (-2)^n x^n \left\{ 1 + nx + \frac{(nx)^2}{2!} + \ldots\ldots \right\}$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{2x}{2!} + \ldots\ldots \right\}^n$$ -ன் விரிவத்தில் x^n-ன் கெழுவாகும்.

$= (-2)^n.$

எனவே $n^n - {}^nc_1\,(n+2)^n + \ \ldots\ \ldots\ = (-2)^n\, n!$

எடுத்துக்காட்டு 12 :

$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^n$ ஐ இரு வழிகளில் விரித்து, கீழ்க் கொடுக்கப் பட்டுள்ள முற்றொருமையினை ஏற்படுத்துக.

$$n^n - n\,(n-2)^n + \frac{n\,(n-1)}{2!}(n-4)^n - \ldots (n+1) \text{ உறுப்புகள்} = 2^n\,.\,n!$$

ஈருறுப்புத் தேற்றப்படி,

$$\frac{(e^x-e^{-x})^n}{2^n}=\frac{1}{2^n}\left[e^{nx}-ne^{(n-1)x}\cdot e^{-x}+\frac{n(n-1)}{1.2}e^{(n-2)x}\cdot e^{-2x}+\ \dots\ (n+1)\text{ உறுப்புகள்}\right]$$

$$=\frac{1}{2^n}\left[e^{nx}-n\,e^{(n-2)x}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot e^{(n-4)x}+\ \dots\ (n+1)\text{ உறுப்புகள்}\right]\quad-\ (1)$$

$$e^{nx}=1+nx+\frac{n^2x^2}{2!}+\frac{n^3x^3}{3!}+\dots+\frac{n^nx^n}{n!}+\dots\dots$$

எனவே e^{nx}-ன் விரிவத்தில் x^n-ன் கெழு $\frac{n^n}{n!}$ ஆகும்.

இதைப் போலவே $-ne^{(n-2)x}$-ன் விரிவத்தில் x^n-ன் கெழு $\frac{-n(n-2^n)}{n!}$ ஆகும்.

இதைப்போலவே $\frac{n(n-1)}{2!}e^{(n-4)x}$-ன் விரிவத்தில் x^n-ன் கெழு

$$\frac{n(n-1)}{1.2}\ \frac{(n-4)^n}{n!}\text{ ஆகும்.}$$

$(n+1)$ உறுப்புகள் வரை எழுதுக.

எனவே, (1)-ன் விரிவத்தில் x^n-ன் கெழு

$$\left[\frac{n^n}{n!}-\frac{n(n-2)^n}{n!}+\frac{n(n-1)}{1.2}\ \frac{(n-4)^n}{n!}-\ \dots\right]\cdot\frac{1}{2^n}$$

ஆகும். ... ... (A)

$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ \dots$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

$$\text{எனவே,}\quad\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^n=\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ \dots\right)^n$$

$$=x^n\left(1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\ \dots\right)^n.$$

எனவே, $\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^n$-ன் விரிவத்தில் x^n-ன் கெழு 1 ஆகும்.

... ... (B)

A ஐயும் B ஐயும் நோக்கினுல் நமக்குக் கிடைப்பது

$$\frac{1}{2^n}\left[\frac{n^n}{n!}-\frac{n(n-2)^n}{n!}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(n-4)^n}{n!}\right.$$

$$\left.-\ \dots\ (n+1)\ \text{உறுப்புகள்}\right]=1$$

$$\therefore\ n^n-n(n-2)^n+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^n-\dots(n+1)$$

உறுப்புகள் $= n!\ 2^n$.

எடுத்துக்காட்டு 13:

$e^{\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)}=e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}$ என்ற முற்றெருமையினைப் பயன்படுத்தியாவது, அன்றி வேறு வழியிலாவது

$$e^2\left\{1+\frac{1}{(1!)^2}+\frac{1}{(2!)^2}+\frac{1}{(3!)^2}+\dots\right\}$$

$$=1+\frac{2!}{(1!)^3}+\frac{4!}{(2!)^3}+\frac{6!}{(3!)^3}+\dots$$

என்ற முற்றெருமையினை உண்டாக்குக.

நாம் $e^{\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)}=e^{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\cdot e^2$ என்று எழுதலாம்.

எனவே, $e^{\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)}$

$$=e^2\left\{1+\frac{(x^2)}{1!}+\frac{(x^2)^2}{2!}+\frac{(x^2)^3}{3!}+\dots\right\}$$

$$\times\left\{1+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{x^2}\right)^2+\dots\right\}$$

வலக் கைப்புறத்தில் உள்ள இரு தொடர்களையும் பெருக்க, நமக்கு x-ன் சார்பில்லா உறுப்பாக,

$$e^2\left\{1+\frac{1}{(1!)^2}+\frac{2}{(2!)^2}+\frac{1}{(3!)^2}+\dots\right\}$$

என்ற தொடர் கிடைக்கின்றது. ... ... (A)

மேலும் $e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2} = \left[1 + \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}{\lfloor 1} + \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^4}{\lfloor 2} + \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6}{\lfloor 3} + \dots \dots\right]$

இப்போது $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$-ல் x இல்லாத ஒரேயொரு உறுப்பு உள்ளது. அது

$$(n+1) \text{ ஆவது உறுப்பு} = t_{n+1} = {}^{2n}c_n\, x^{2n-n}\frac{1}{x^n}$$

$$= {}^{2n}c_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \cdot \lfloor 2n-n}$$

$$= \frac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}$$

$n = 1, 2, 3 \dots\dots$ என்ற மதிப்புகளைக் கொடுத்தால்,

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2, \left(x+\frac{1}{x}\right)^4, \left(x+\frac{1}{x}\right)^6 \dots \dots$ என்ற விரிவங்களில் x இல்லாத உறுப்புகள் முறையே

$$\frac{\lfloor 2}{(\lfloor 1)^2}, \frac{\lfloor 4}{(\lfloor 2)^2}, \frac{\lfloor 6}{(\lfloor 3)^2} \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

எனவே, $e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}$ என்ற விரிவில் x^n இல்லாத உறுப்பு,

$$\left[1 + \frac{1}{\lfloor 1} \cdot \frac{\lfloor 2}{(\lfloor 1)^2} + \frac{1}{\lfloor 2} \cdot \frac{\lfloor 4}{(\lfloor 2)^2} + \frac{1}{\lfloor 3} \cdot \frac{\lfloor 6}{(\lfloor 3)^2} + \dots \dots\right]$$

$\therefore$ (A), (B)-இவற்றிலிருந்து,

$$e^2\left\{1 + \frac{1}{(\lfloor 1)^2} + \frac{1}{(\lfloor 2)^2} + \frac{1}{(\lfloor 3)^2} + \dots\right\}$$

$$= 1 + \frac{\lfloor 2}{(\lfloor 1)^3} + \frac{\lfloor 4}{(\lfloor 2)^3} + \frac{\lfloor 6}{(\lfloor 3)^3} + \dots \dots$$

பயிற்சி 3.

கந்தழி வரை பின்வரும் தொடர்களின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

1. $1 + \frac{2x}{\underline{|1}} + \frac{3x^2}{\underline{|2}} + \frac{4x^3}{\underline{|3}} + \dots \dots$

2. $1.2 + \frac{2.3}{\underline{|1}} x + \frac{3.4}{\underline{|2}} x^2 + \dots \dots$

3. $2.4 + \frac{3.5}{\underline{|1}} . x + \frac{4.6}{\underline{|2}} x^2 + \dots \dots$

4. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+2)\underline{|n}} . x^n$

5. $1 + \frac{2^3}{\underline{|1}} x + \frac{3^3}{\underline{|2}} x^2 + \frac{4^3}{\underline{|3}} x^3 + \dots \dots$

6. $x + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} + \dots \dots$

7. $1.3 - \frac{2.5}{\underline{|1}} x + \frac{3.7}{\underline{|2}} x^2 - \dots \dots$

8. $1.2 + 2.3.x + 3.4.\frac{x^2}{\underline{|2}} + 4.5.\frac{x^3}{\underline{|3}} + \dots \dots$

9. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{\underline{|n}} x^n$

10. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2 + n}{\underline{|n}} x^n$

11. $\frac{2}{\underline{|1}} + \frac{3}{\underline{|2}} + \frac{4}{\underline{|3}} + \dots \dots$

12. $1 + \frac{3}{\underline{|2}} + \frac{5}{\underline{|3}} + \frac{7}{\underline{|4}} + \dots \dots$

13. $1 - \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{2}{\underline{|3}} - \frac{3}{\underline{|4}} + \dots \dots$

14. $\frac{1}{\underline{|1}} + \frac{4}{\underline{|2}} + \frac{7}{\underline{|3}} + \dots \dots$

15. $\sum_{1}^{\infty} \frac{3n+2}{\underline{|n}}$

16. $\frac{1.2}{\underline{|3}} + \frac{2.3}{\underline{|4}} + \frac{3.4}{\underline{|5}} + \dots \dots$

17. $\frac{1.2}{\underline{|3}} + \frac{2.5}{\underline{|4}} + \frac{3.8}{\underline{|5}} + \dots \dots$

18. $1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2.4} + \frac{7}{2.4.6} + \dots \dots$

19. $1 - \frac{2^2}{\underline{|1}} + \frac{3^2}{\underline{|2}} - \frac{4^2}{\underline{|3}} + \dots \dots$

20. $\frac{1^3}{\underline{|1}} + \frac{2^3}{\underline{|2}} + \frac{3^3}{\underline{|3}} + \dots \dots$

21. $1 + \frac{1+2}{\underline{|2}} + \frac{1+2+3}{\underline{|3}} + \dots \dots$

22. $\frac{2 . 3}{\underline{|3}} + \frac{3 . 5}{\underline{|4}} + \frac{4 . 7}{\underline{|5}} + \frac{5 . 9}{\underline{|6}} + \dots \dots$

23. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3 + 3n + 4}{\underline{|n}}$

24. $1 + \frac{1+3}{\underline{|2}} + \frac{1+3+3^2}{\underline{|3}} + \frac{1+3+3^2+3^3}{\underline{|4}} + \dots$

25. $\frac{3}{\underline{|1}} + \frac{4}{\underline{|3}} + \frac{5}{\underline{|5}} + \frac{6}{\underline{|7}} + \dots \dots$

26. $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{4n^2 + 2n + 1}{\lfloor 2n}$

27. $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{3n^2 + n - 2}{\lfloor 2n}$

28. $1 + \dfrac{4^2}{\lfloor 3} + \dfrac{4^4}{\lfloor 5} + \dfrac{4^6}{\lfloor 7} + \dots \dots \dots$

29. $(1 + 2) \log c^2 + \dfrac{1 + 2^2}{\lfloor 2} (\log c^2)^2 + \dfrac{1 + 2^3}{\lfloor 3} (\log c^2)^3 + \dots \dots$

30. $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{n^3 + 3n^2 + 1}{\lfloor n}$

31, $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{n^2 + 2}{\lfloor n}$

32. $\dfrac{1^2}{\lfloor 3} + \dfrac{2^2}{\lfloor 5} + \dfrac{3^2}{\lfloor 7} + \dots \dots \dots$

33. $\dfrac{1}{4 . \lfloor 2} + \dfrac{2}{5 . \lfloor 3} + \dfrac{3}{6 . \lfloor 4} + \dots \dots \dots$

34. $\dfrac{1^2}{\lfloor 1} + \dfrac{1^2 + 2^2}{\lfloor 2} + \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2}{\lfloor 3} + \dots \dots \dots$

35. $1^3 - \dfrac{2^3}{\lfloor 1} + \dfrac{3^3}{\lfloor 2} - \dfrac{4^3}{\lfloor 3} + \dots \dots \dots$

36. $\dfrac{1 . 2 . 3}{\lfloor 2} + \dfrac{2 . 4 . 5}{\lfloor 3} + \dfrac{3 . 6 . 7}{\lfloor 4} + \dots \dots \dots$

37. $\dfrac{1}{\lfloor 1} + \dfrac{4}{\lfloor 2} + \dfrac{7}{\lfloor 3} + \dfrac{10}{\lfloor 4} + \dots \dots$

38. $1 + \frac{1+a}{\underline{|2}} + \frac{1+a+a^2}{\underline{|3}} + \dots \dots$

39. பின் வருவனவற்றை விரித்தெழுதி, x^n-ன் கெழுவைக் காண்க.

(a) $(1-x)\,e^{1+x}$

(b) $(1+2x+3x^2)e^{2x}$

(c) $\frac{(1+2x-3x^2)}{e^x}$

(d) $\frac{2+3x}{e^{2x}}$

(e) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(a+bx)^n}{\underline{|n}}$

(f) $(3+2x)e^{3x}$.

40. $(a+bx)\,e^x$-ன் விரிவில் x^3, x^4-ன் கெழுக்கள் முறையே 2, $\frac{3}{4}$ ஆனால் x^4-ன் கெழு என்ன ?

41. $\sum \frac{(a+bx)^n}{\underline{|n}}$ என்ற விரிவில் x^{14}, x^{15}-ன் கெழுக்களின் விகிதம் 3 ஆனால், x^{24}, x^{25}-ன் கெழுக்களின் விகிதம் 5 என்று காட்டுக.

42. λ ஒரு மாறிலியானால்,

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{xe^{-\lambda}\lambda^x}{\underline{|x}} = \lambda \text{ என நிரூபி.}$$

43. $\frac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}}$ என்ற விரிவில் x^r-ன் கெழு

$$\frac{1}{\underline{|r}}\,(1^r+2^r+3^r+\dots\dots+n^r) \text{ என நிறுவுக.}$$

44. $n^{n-1} - n(n-1)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} (n-2)^{n-1} - \dots \dots$
n உறுப்புகள் $= 0$ என்று காட்டுக.

45. $n^{n+2} - n\,(n-1)^{n+2} + \frac{n\,(n-1)}{\lfloor 2} (n-2)^{n+2} - \dots \dots$
$= \frac{1}{24}\, n\,(3n+1) \lfloor n+2$ என்று நிறுவுக.

46. $(e^x + e^{-x})$-ஐ இரு விதங்களில் விரித்தெழுதி
$n^2 + n\,(n-2)^2 + \frac{n\,(n-1)}{\lfloor 2} (n-4)^2 + \dots \dots$
$(n+1)$ உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $= n\,.\,2^n$ என நிறுவுக.

47. $(e^x - 1)^n$ ஐ இருவிதங்களில் விரித்தெழுதி,
$n^2 - n\,(n-1)^n + \frac{n\,(n-1)}{\lfloor 2} (n-2)^n - \dots$ n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $= \lfloor n$ என நிறுவுக.

48. n ஓர் இரட்டைப்படை எண்ணுயின்
$$\frac{1}{\lfloor 1} \cdot \frac{1}{\lfloor n-1} + \frac{1}{\lfloor 3} \cdot \frac{1}{\lfloor n-3} + \frac{1}{\lfloor 5} \cdot \frac{1}{\lfloor n-5} + \dots \dots + \frac{1}{\lfloor n-1} \cdot \frac{1}{\lfloor 1} = \frac{2^{n-1}}{\lfloor n}$$
என நிறுவுக.

4. மடக்கைத் தொடர்

இவ்வத்தியாயத்தில் வரும் மடக்கைகள் "e"-ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டவைகளாகும்.

4·1. மடக்கைத் தேற்றம்

$-1 < x < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \dots \text{ கந்தழிக்கு.} \longrightarrow (1)$$

4·2. தேற்றத்தின் விளைவுகள்

$-1 < x < 1$ என்று இருக்கும்போது $-x$-ம், -1 க்கும், $+1$ க்கும் இடைப்பட்டு இருக்கின்றது. எனவே தேற்றத்தின்படி

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \dots$$

எனவே,

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \text{ கந்தழிக்கு} \longrightarrow (2)$$

(2) + (1) தருவது

$$\log(1+x) - \log(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \text{ கந்தழிக்கு}\right)$$

எனவே

$$\log \frac{(1+x)}{(1-x)} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \text{ கந்தழிக்கு}\right) \quad \longrightarrow (3)$$

(3)-ல் $\frac{1+x}{1-x} = \frac{m}{n}$ என்று ஈடு செய்தால்—அதாவது

$x = \frac{m-n}{m+n}$ என ஈடு செய்தால்

$$\log \frac{m}{n} = 2\left\{\frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \dots \text{ கந்தழிக்கு}\right\} \quad \longrightarrow (4)$$

ஈண்டு m, n ஆகியவைகள் மேலுள்ள கட்டுப்பாட்டினை ஆராய்ந்து அறிக. தேற்றத்தினையும், அதன் விளைவின் வழி வந்த சூத்திரங்களையும் பயன்படுத்திச் சில தொடர்களின் தொகைகள் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\log\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = \frac{2ax}{a^2+x^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{2ax}{a^2+x^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2ax}{ax+x^2}\right)^5 + \dots \dots \text{ என்று காட்டுக.}$$

$0 < a < x$ என்று இருக்க முடியாது என்பதை நாம் முதற் கண் அறிவோம். $0 < a < x$ என்று இருந்தால் $a-x$ ஒரு குறை யெண்ணாய் இருக்கும். எனவே $\frac{a+x}{a-x}$ ஒரு குறை எண்ணா யிருக்கும். எனவே இடக் கைப்புறம் log {ஒரு குறை எண்.} இது ஒரு கற்பனை எண்ணாகும். ஆனல் வலக் கைப்புறம் ஒரு மெய்யெண்ணாயிருக்கும். எனவே $0 < a < x$ ஆக இருக்க முடியாது. இப்படி இருப்பின் கொடுக்கப்பட்ட கணக்கின் சமத்திற் குப் பொருளில்லை.

எனவே $0 < x < a$. இக்கட்டுப்பாட்டில் $\frac{a+x}{a-x}$ ஒரு கூட்டெண்ணாகும். மேலும் $0 < \frac{2ax}{a^2+x^2} < 1$. எனவே $y = \frac{2ax}{a^2+x^2}$ என்று ஈடு செய்தால் வலக் கைப்புறத்தில் உள்ள தொடர் $\left\{y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \dots \text{ கந்தழி வரை}\right\}$ என்ற அமைப்பைப் பெறும்.

$0 < \frac{2ax}{a^2+x^2} < 1$ என்று இருப்பதால் $0 \leqslant y \leqslant 1$ என்று இருக்கின்றது.

எனவே (2)-ன் படி

$$\left\{y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \dots \text{ கந்தழி வரை}\right\} = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{1+\frac{2ax}{a^2+x^2}}{1-\frac{2ax}{a^2+x^2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{(a+x)^2}{(a-x)^2}$$

$$= \log\frac{a+x}{a-x}$$

= இடக் கைப்புறம்

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$2\left[\frac{1}{2n^2-1} + \frac{1}{3(2n^2-1)^3} + \frac{1}{5(2n^2-1)^5} + \dots \text{ கந்தழி வரை}\right] = \log\frac{n^2}{n^2-1}$$ என்று காட்டுக.

இ.கை. புறத்தில் $\frac{1}{2n^2-1} = x$ என ஈடு செய்க.

$$\therefore \text{ இ.கை.பு.} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \text{ கந்தழி வரை}\right]$$

$$= \log\frac{1+x}{1-x} \text{ [(8)-ன் படி].}$$

ஈண்டு $-1 < x < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் இருக்க வேண்டும். (இதனால் n-ன்மேல் ஏற்படும் கட்டுப்பாட்டை ஆராய்க.)

$$\therefore \text{ இ. கை. பு.} = \log\frac{(1+x)}{(1-x)}$$

$$= \log\frac{1+\frac{1}{2n^2-1}}{1-\frac{1}{2n^2-1}}$$

$$= \log\frac{2n^2}{2n^2-2}$$

$$= \log\frac{n^2}{n^2-1}$$

$$= \text{வ. கை. பு.}$$

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$$\log(x+2h) = 2\log(x+h) - \log x - \left[\frac{h^2}{(x+h)^2} + \frac{h^4}{2(x+h)^4} + \frac{h^6}{3(x+h)^6} + \dots\dots\right]$$

என்று அறிக.

வலக் கைப்புறத்தில் $y = \dfrac{h}{x+h}$ என்று ஈடு செய்க. ஈண்டு $x > 0$, $h > 0$ என்று எடுத்துக் கொள்ளலாம். இதனால் $0 < \dfrac{h}{x+h} < 1$ என்று கட்டுப்பாட்டில் அமைகின்றது.

$$\therefore \text{ வ.கை.பு.} = 2\log(x+h) - \log x - \left[y^2 + \frac{y^4}{2} + \frac{y^6}{3} + \dots\dots\right].$$

$y^2 = z$ என்று ஈடு செய்க.

எனவே,

$$\left[y^2 + \frac{y^4}{2} + \frac{y^6}{3} + \;\dots\;\dots\right] = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots\dots$$
$$= -\log(1-z)$$

$(\because$ (2)-ன் படி).

எனவே,

$$\text{வ.கை.பு.} = 2\log(x+h) - \log x + \log(1-y^2)$$
$$= 2\log(x+h) - \log x + \log\left(1 - \frac{h^2}{(x+h)^2}\right)$$
$$= 2\log(x+h) - \log x + \log\frac{(x+2h)(x)}{(x+h)^2}$$
$$= \log\frac{(x+h)^2}{x}\cdot\frac{(x+2h)x}{(x+h)^2}$$
$$= \log(x+2h)$$
$$= \text{இ.கை.பு.}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

x நேர் மதிப்பை ஏற்றிருக்கும்போது

$$\log x = \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3-1}{(x+1)^3} + \dots\dots$$

$$\text{வ. கை. பு.} = \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3-1}{(x+1)^3} + \dots\dots$$
$$= \left\{\frac{x}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{(x+1)^2} + \frac{x^3}{3\,.\,(x+1)^3} + \dots\right\}$$
$$- \left\{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} + \dots\dots\right\}$$
$$= \left\{y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \dots\dots\right\}$$
$$- \left\{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots\dots\dots\right\}$$

சண்டு $y = \dfrac{x}{x+1}$ & $z = \dfrac{1}{x+1}$

எனவே, (2)-ல் பயன்படுத்தினால்,

$$\text{வ. கை. பு.} = -\log(1-y)+\log(1-z)$$

$$= \log\frac{(1-z)}{(1-y)}$$

$$= \log\frac{\left(1-\frac{1}{x+1}\right)}{\left(1-\frac{x}{x+1}\right)}$$

$$= \log\frac{x/x+1}{1/x+1}$$

$$= \log x$$

$$= \text{இ. கை. பு.}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

a, b, c என்பவை அடுத்தடுத்து வரும் மூன்று கூட்டு முழு எண்களாயின்,

$$\log b = \left\{\tfrac{1}{2}\log a + \tfrac{1}{2}\log c + \frac{1}{2ac+1} + \frac{1}{3\,(2ac+1)^3} + \dots\dots \text{ கந்தழிவரை}\right\}$$

என்று காட்டுக.

வலக் கைப்புறத்தில் $\frac{1}{2ac+1} = y$ என்று ஈடு செய்க.

$$\text{எனவே வ.கை.பு.} = \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{2}\log c + y + \frac{y^3}{3} + \dots\dots$$

$$= \frac{1}{2}\log ac + \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y} \quad (\because (3)\text{-ன்படி.})$$

$$= \frac{1}{2}\log ac + \frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{2ac+1}}{1-\frac{1}{2ac+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\log ac + \frac{1}{2}\log\frac{2(ac+1)}{2ac},$$

$$= \frac{1}{2}\log ac \,.\, \frac{(ac+1)}{ac}$$

$$= \frac{1}{2}\log(ac+1)$$

ஆனால் a, b, c என்ற மூன்றும் அடுத்தடுத்து வரும் எண்கள்.

எனவே $a+1=b,\quad b+1=c$

$$\therefore\quad ac=(b+1)(b-1)=b^2-1$$

எனவே வ.கை.பு. $= \frac{1}{2}\log(b^2-1+1)$

$$= \frac{1}{2}\log b^2$$

$$= \log b$$

$=$ இ.கை.பு.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$\frac{x}{1\,.\,2}+\frac{x^2}{2\,.\,3}+\frac{x^3}{3\,.\,4}+\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் தொகை காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் n ஆவது உறுப்பு $= \frac{x^n}{n\,.\,(n+1)}$ ஆகும். இதை u_n என்று குறிப்போம்.

$$\therefore\quad u_n=\frac{x^n}{n\,(n+1)}$$

$$=\frac{(n+1-n)}{n\,(n+1)}\cdot x^n$$

$$=\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right\}x^n$$

$$=\frac{x^n}{n}-\frac{x^n}{n+1}$$

$n=1,2,3,\ldots$ என ஈடு செய்தால்

$$u_1=\frac{x}{1}-\frac{x}{2}$$

$$u_2=\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{3}$$

$$u_3=\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{4}$$

$\vdots$

கந்தழி வரை.

கூடுதல் கண்டால்,

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \text{ கந்தழி வரை}$$

$$= \left\{ x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \text{ கந்தழி வரை.} \right\}$$

$$- \left\{ \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \ldots \text{ கந்தழி வரை.} \right\}$$

$$= -\log(1-x) - \frac{1}{x}\left\{ \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \right\}$$

$$= -\log(1-x) - \frac{1}{x}\left\{ -\log(1-x) - x \right\}$$

$$= -\log(1-x) + \frac{1}{x}\log(1-x) + 1$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{x} - 1 \right)\log(1-x)$$

$$= 1 + \frac{1-x}{x}\log(1-x)$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$$\left\{ \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{3.4} + \frac{x^3}{5.6} + \ldots\ldots \text{ கந்தழிவரை.} \right\}$$

இத்தொடரின் தொகை காண்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் n ஆவது உறுப்பு $\dfrac{x^n}{(2n-1)(2n)}$ ஆகும்.

இதை u_n என்று குறிப்போம். எனவே

$$u_n = \frac{x^n}{(2n-1)(2n)} = \frac{\{2n-(2n-1)\}\, x^n}{(2n-1)(2n)}$$

$$= \frac{x^n}{2n-1} - \frac{x^n}{2n}$$

இனி $n = 1, 2, 3, \ldots$ என ஈடு செய்வோம்.

$$\therefore \quad u_1 = \frac{x}{1} - \frac{x}{2}$$

$$u_2 = \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{4}$$

.
.
.
.
.

எனவே

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots = \left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{5} \right) - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \dots \right)$$

$\left\{ x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{5} + \dots \right\}$ -இதை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதை $\left\{ (\sqrt{x})^2 + \frac{(\sqrt{x})^4}{3} + \frac{(\sqrt{x})^6}{5} + \dots \right\}$

என்று எழுதலாம்.

எனவே $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$

$$\dots = \left\{ (\sqrt{x})^2 + \frac{(\sqrt{x})^4}{3} + \frac{(\sqrt{x})^6}{5} + \dots \right\} - \left\{ \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \dots \right\}$$

$$= \sqrt{x} \left\{ \sqrt{x} + \frac{(\sqrt{x})^3}{3} + \frac{(\sqrt{x})^5}{5} + \dots \right\} - \frac{1}{2} \left\{ x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right\}$$

$$= \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} \log \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \log (1-x)$$

($\because$ (2) ஐயும், (3) ஐயும் பயன்படுத்தினால்)

$$= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{x} \log \left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) + \log (1-x) \right\}$$

தேற்றம் 2 :

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots \text{ கந்தழி வரை,} \quad \longrightarrow (5)$$

இவ்விரண்டு தேற்றங்களின் மெய்ப்பாடுகளை மூன்றும் பாகத்தில் காணலாம்.

குறிப்பு :

தேற்றம் 1, $-1 < x < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டினுல்

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

என்று கூறுகின்றது.

இதில் $x = 1$ என ஈடு செய்தால்

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

என்று கிடைக்கின்றது.

தேற்றம் 2-ன் படி இது உண்மையாகும்.

எனவே மடக்கைத் தேற்றத்தை

$-1 < x \leqslant 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

என்ற அமைப்பில் எழுதலாம்.

இனி தேற்றம் 2 ஐப் பயன்படுத்திச் சில தொடர்களின் தொகை காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$$\log\frac{4}{e} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \ldots$$

என்று காண்க.

வலக் கைப் புறத்தில் உள்ள தொடரின் n ஆவது உறுப்

$$= \frac{1}{n(n+1)} \cdot (-1)^{n+1}.$$

இதை u_n எனக் குறிப்போம்.

$$\therefore \quad u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)(-1)^{n+1}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$ என ஈடு செய்தால்

$$u_1 = (1 - \tfrac{1}{2})$$

$$u_2 = -(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3})$$

$$u_3 = (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4})$$

$$\vdots$$

எனவே $u_1 + u_2 + u_3 + \; \cdots$

$$= (1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \ldots) + (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \ldots)$$

$$= \log 2 + \log 2 - 1$$

$$= \log 4 - 1$$

$$= \log 4 - \log_e e$$

$$= \log \frac{4}{e}.$$

= இ. கை. பு.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} + \ldots$$ இத் தொடரின் தொகை காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் n ஆவது உறுப்பு

$$\frac{1}{(2n-1)\,2n\,(2n+1)} \text{ ஆகும்.}$$

இதை u_n எனக் கொண்டால்

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n)(2n+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right]$$

$$\therefore\ u_1 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right]$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right]$$

$$\vdots$$

கந்தழிக்கு.

எனவே,

$$u_1+u_2+u_3+\dots\dots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right)$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\log 2) - \frac{1}{2}(-\log 2 + 1)$$

$$= \log 2 - \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} + \dots = \log 2 - \frac{1}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} \dots = \frac{1}{4}\log 2$$

எனக் காட்டுக.

இடக் கைப்புறத் தொடரின் n ஆவது உறுப்பு

$$= \frac{1}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{\frac{1}{2}}{4n-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n-1}\right)$$

இதை u_n எனக் கொண்டு $n = 1, 2, 3, \dots\dots$ என ஈடு செய்வோம்.

$$\text{நாம் } u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{4n} - \frac{1}{2(4n-2)}$$

என்று எழுதலாம்.

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-1}\right)$$

$$\therefore \quad u_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)$$

$$\vdots$$

எனவே

$$u_1+u_2+u_3+\dots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\dots\right)$$

$$- \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\dots\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\dots\right)$$

$$= \frac{1}{4}\log 2.$$

எடுத்துக்காட்டு 11 :

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2.4}+\frac{5}{3.8}+\frac{7}{4\cdot 16}+\dots\ \dots = 2-\log 2$$ என்று காட்டுக.

u_n என்பது இ. கை. புறத் தொடரின் n ஆவது உறுப்பு எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore\ u_n = \frac{2n-1}{n.2^n}$$

$$= \frac{2}{2^n} - \frac{1}{n\ .\ 2^n}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{n\ .\ 2^n}.$$

$$\therefore\ u_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}$$

$$u_3 = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}$$

.
.
.
.

கந்தழிக்கு.

எனவே,

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\dots\ \dots$$

$$= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots \text{ கந்தழிக்கு}\right)$$

$$- \left(\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{(\frac{1}{2})^2}{2}+\frac{(\frac{1}{2})^3}{3}+\dots\ \dots\right)$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \log\left(1-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= 2 + \log\tfrac{1}{2}$$

$$= 2 - \log 2$$

= வ. கை. பு.

4·3. e ஐ அடியாகக் கொண்ட எண்களின் மடக்கைகளின் மதிப்பறிதல்

4·2. தேற்றத்தின் விளைவுகளில் நாம்

$$\log \frac{m}{n} = 2 \left\{ \frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \dots \text{ கந்தழி வரை } \right\}$$

என்று பார்த்தோம். அவற்றிலிருந்து நாம் e ஐ அடியாகக் கொண்ட எண்களின் மடக்கைகளின் மதிப்பை அறியலாம். நமக்கு $\log \frac{6}{5}$-ன் மதிப்பு வேண்டுமாகில், $m=6$; $n=5$ என ஈடு செய்ய,

$$\log \frac{6}{5} = 2\left[\frac{1}{11} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{11^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{11^5} + \dots\right]$$

$$\frac{2}{11} = \cdot 181{,}818{,}18$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{11^3} = \cdot 000{,}500{,}88$$

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{11^5} = \cdot 000{,}002{,}48$$

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{11^7} = \cdot 000{,}000{,}01$$

$$\overline{\qquad = \cdot 182{,}321{,}55}$$

$\therefore \log \frac{6}{5} = \cdot 182{,}321{,}55$

தோராயமாக]

$= \cdot 182{,}322$

இவ்விதமாக எல்லா எண்களின், e ஐ அடியாகக் கொண்ட எண்களின் மடக்கைகளின் மதிப்பறியலாம்.

4·4. விரிவுகள்

$\log(a+bx)$ ஐ விரித்தல்

$$\log(a+bx) = \log a\left(1+\frac{b}{a}x\right)$$

$$= \log a + \log\left(1+\frac{b}{a}x\right)$$

$$= \log a + \left\{ \frac{b}{a}x - \frac{b^2}{2a^2}x^2 + \frac{b^3}{3a^3}x^3 - \ldots \right\}$$

மேலுள்ள வழியில் $\left|\frac{b}{a}x\right| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டை ஏற்றியிருக்கின்றோம்.

அதாவது $|x| < \left|\frac{a}{b}\right|$ என்று அக் கட்டுப்பாடு அமைகின்றது.

குறிப்பு: மேற்கூறிய வழியில் $\log(1+px+qx^2)$ என்ற மடக்கையினையும் விரிக்கலாம். x-ன் மேலுள்ள கட்டுப்பாடு இங்கு மாறுவதையும் கண்டறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 12 :

$\log \frac{1}{6+x-x^2}$ -ன் விரிவத்தில் x^n-ன் கெழு

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{2^n}\right\}$$ என்று காட்டுக.

$$\log \frac{1}{6+x-x^2} = \log \frac{1}{(3-x)(2+x)}$$

$$= \{-\log(3-x) - \log(2+x)\}$$

$$= -\log 3\left(1-\frac{x}{3}\right) - \log 2\left(1+\frac{x}{2}\right)$$

$$= -\log 3 - \log\left(1-\frac{x}{3}\right) - \log 2 - \log\left(1+\frac{x}{2}\right)$$

$$= -\log 6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

$$\therefore \quad x^n\text{-ன் கெழு} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{3^n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^{n+2}}{2^n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{2^n}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 13 :

$\log \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$-ன் விரிவத்தில், n இரட்டைப்படை எண் ஆயின், x^n-ன் கெழு பூச்சியம் என்பதை மெய்ப்பாடு செய்க.

$$1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$$

$$1+x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$$

$$\therefore \quad \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} = \frac{(1-x^3)(1+x)}{(1+x^3)(1-x)}.$$

$$\therefore \quad \log \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} = \log \frac{(1-x^3)(1+x)}{(1+x^3)(1-x)}$$

$$= \log \frac{(1+x)}{(1-x)} - \log \frac{(1+x^3)}{(1-x^3)}$$

$$= 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \dots\right] - 2\left[x^3 + \frac{x^9}{3} + \dots\right]$$

ஆகவே r ஒரு நேர் முழு எண் எனில்,

$\therefore$ x^{2r}-ன் கெழு $= 0$.

$\therefore$ $\log \dfrac{(1+x+x^2)}{(1-x+x^2)}$-ன் விரிவத்தில் $x^{2r} = x^n$-ன் கெழு 0 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 14 :

$\log \dfrac{1}{2x^2-5x+2}$-ன் விரிவத்தில் x^n-ன் கெழு $\dfrac{1}{n}\left(2^n + \dfrac{1}{2^n}\right)$ என்று காட்டுக. $|x| < \frac{1}{2}$ என்று எடுத்துக் கொள்க.

$$\log \frac{1}{2x^2-5x+2} = \log \frac{1}{(2x-1)(x-2)}$$

$$= \log \frac{1}{(1-2x)(2-x)}$$

$$= -\log(1-2x) - \log(2-x)$$

$$= -\log(1-2x) - \log 2\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n} - \log 2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)x^n - \log 2$$

$\therefore$ x^n-ன் கெழு $= \frac{1}{n}\left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)$ ஆகும்.

4·5. முற்றொருமைகள்

$\log(a+bx+cx^2+\ldots)$ என்ற மடக்கை இரு வழிகளில் x-ன் படிகளில் விரிக்கப்படுமாயின், நாம் ஒத்த படியுள்ள x-ன் கெழுக்களைச் சமப்படுத்தலாம். இவ்வாறு சமப்படுத்தும்போது பல முற்றொருமைகள் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$ax^2+bx+c=0$-ன் மூலங்களாய் α, β இருப்பின் $\log(a-bx+cx^2) = \log a + (\alpha+\beta)x - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3 - \ldots\ldots$ என்று காட்டுக.

α β என்பன $ax^2+bx+c=0$-ன் மூலங்களாதலால்

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

$$\therefore\ (a-bx+cx^2) = a\left\{1+\overline{\alpha+\beta}x+\alpha\beta x^2\right\}$$

$$= a(1+\alpha x)(1+\beta x).$$

$$\therefore \quad \log (a-bx+cx^2) = \log a(1+\alpha x)(1+\beta x)$$

$$= \log a + \log(1+\alpha x) + \log(1+\beta x)$$

$$= \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \alpha^n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \beta^n x^n$$

$$= \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (\alpha^n + \beta^n) x^n.$$

$$= \log a + (\alpha+\beta)x - \frac{(\alpha^2+\beta^2)}{2} x^2 + \frac{\alpha^3+\beta^3}{3} \cdot x^3 - \dots \dots$$

எடுத்துக்காட்டு 16 :

$\log(1-x)^2$-ஐ இரு வழிகளில் விரித்து

$$2^n - n.2^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2} 2^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} 2^{n-6} + \dots = 2$$ என்று காட்டு.

$$\log(1-x)^2 = 2\log(1-x)$$

$$= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$\therefore \quad \log(1-x)^2$-ல் x^n-ன் கெழு $= -\dfrac{2}{n}$ . ... (1)

ஆனால் $\log(1-x)^2 = \log(1-2x+x^2)$

$$= \log\{1-x(2-x)\}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(2-x)^n}{n}.$$

இதில் x^n-ன் கெழு என்னவென்று ஆராய்வோம்.

$$\log(1-x)^2 = -\sum_{n=1}^{n}\frac{x^n(2-x)^n}{n} - \sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{x^r(2-x)^r}{r}$$

$\sum_{n+1}^{\infty}\frac{x^r(2-x)^r}{r}$ — இதில் x^n உறுப்பு இராது.

எனவே $-\sum_{r=1}^{n}\frac{x^r(2-x)^r}{r}$-ல் x^n-ன் கெழுவினைக் காண வேண்டும்.

$$-\sum_{n=1}^{n}\frac{x^r(2-x)^r}{r} = -\left[\frac{x^n(2-x)^n}{n} + \frac{x^{n-1}(2-x)^{n-1}}{n-1} + \frac{x^{n-2}(2-x)^{n-2}}{n-2} + \frac{x^{n-3}(2-x)^{n-3}}{n-3} + \ldots\ldots\right]$$

$\frac{x^n(2-x)^n}{n}$-ல் x^n-ன் கெழு $+\frac{2^n}{n}$ ஆகும்;

$\frac{x^{n-1}(2-x)^{n-1}}{(n-1)}$-ல் x^n-ன் கெழு -2^{n-2} ஆகும்;

$\frac{x^{n-2}(2-x)^{n-2}}{(n-2)}$-ல் x^n-ன் கெழு $+2^{n-4}\frac{(n-2)c_2}{(n-2)}$ ஆகும்.

(ie) ,, ,, $(n-3)2^{n-4}$ ஆகும்.

$\frac{x^{n-3}(2-x)^{n-3}}{n-3}$-ல் x^n-ன் கெழு $-2^{n-6}\frac{(n-3)c_3}{n-3}$ ஆகும்.

(ie) ,, ,, $-2^{n-6}.(n-4)(n-5)$ ஆகும்.

⋮ ⋮

எனவே

$$-\sum_{r=1}^{n}\frac{x^r(2-x)^r}{r}\text{-ல் } x^n\text{-ன் கெழு} = -\left\{\frac{2^n}{n} - 2^{n-2} + (n-3)2^{n-4} - (n-4)(n-5)2^{n-6} + \ldots\right\}$$

$\therefore$ $\log(1-x)^2$-ல் x^n-ன் கெழு

$$= -\left\{\frac{2^n}{n} - 2^{n-2} + (n-3)2^{n-4} - (n-4)(n-5)\,2^{n-6} + \dots\right\}$$

(1) ஐயும் (2) ஐயும் ஒப்பிட ... ... (2)

$$-\frac{2}{n} = -\left\{\frac{2^n}{n} - 2^{n-2} + (n-3)\,2^{n-4} - (n-4)(n-5)\,2^{n-6} + \dots\dots\right\}$$

$$\therefore\ 2 = 2^n - n.\,2^{n-2} + n(n-3)\,2^{n-4} - n(n-4)(n-5)\,2^{n-6} + \dots$$

எடுத்துக்காட்டு 17 :

$a+b+c=0$ என்று இருக்கும்போது

$\sum \frac{a^7}{7} = \sum \frac{a^4}{2} \cdot \sum \frac{a^3}{3}$ என்று காட்டுக.

$(1-ax)\ (1-bx)\ (1-cx) = 1 - (a+b+c)x + (ab+bc+ca)x^2 - abc\,x^3$ என்பதைக் கவனிக்க.

$$\therefore\ (1-ax)(1-bx)(1-cx) = 1 + (ab+bc+ca)\,x^2 - abc\,x^3 \qquad \{\because\ a+b+c=0\}$$

$p = ab+bc+ca$

$q = abc$ என்று வைத்துக் கொள்வோம்.

$$\therefore\ (1-ax)(1-bx)(1-cx) = 1 + px^2 - qx^3 = 1 + x^2(p-qx).$$

$$\therefore\ \log(1-ax)\ (1-bx)\ (1-cx) = \log\{1+x^2(p-qx)\}.$$
$$= \log\{1-x^2(qx-p)\}$$

x-ன் தகுதியான மதிப்பிற்கு

$$\left(ax + \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^3x^3}{3} + \dots\right) + \left(bx + \frac{b^2x^2}{2} + \frac{b^3x^3}{3} + \dots\right) + \left(cx + \frac{c^2x^2}{2} + \frac{c^3x^3}{3} + \dots\right)$$

$$= x^2(qx-p) + \frac{x^4(qx-p)^2}{2} + \frac{x^6(qx-p)^3}{3} + \frac{x^8(qx-p)^4}{4} + \dots$$

எனவே, இரு புறங்களில் உள்ள x^7-ன் கெழுக்களை ஒப்பிடலாம்.

ஒப்பிட $\frac{1}{7}(a^7+b^7+c^7) = q\,p^2$ என்று கிடைக்கின்றது. ...(1)

x^4-ன் கெழுக்களை ஒப்பிட

$$\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4) = \frac{1}{2}\,p^2$$

அதாவது, $\frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4) = p^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

x^3-ன் கெழுக்களை ஒப்பிட

$$\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3) = q \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$(2)\times(3)$ தருவது

$$\frac{1}{2}\sum a^4 \cdot \frac{1}{3}\sum b^3 = p^2 q.$$

(1)-ன் வலப் புறத்தில் இதைப் பயனிட

$$\sum \frac{a^7}{7} = \sum \frac{a^4}{2} \cdot \sum \frac{b^3}{3}$$ என்று விடை கிடைக்கின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 18 :

காரணிப்படுத்துக :

$(a+b)^7 - a^7 - b^7.$

$(1-ax)(1-bx) \equiv 1-(a+b)x + abx^2$ என்று எழுதுவதை நோக்குக.

$\left.\begin{array}{l} p = a+b \\ q = ab \end{array}\right\}$ என்க.

$\therefore \quad (1-ax)(1-bx) = 1-px+qx^2$

எனவே $\log(1-ax)(1-bx) = \log(1-px+qx^2)$

அதாவது $-\log(1-ax)(1-bx) = -\log(1-px+qx^2)$

அதாவது $-\log(1-ax) - \log(1-bx) \equiv -\log\ \{1-x(p-qx)\}$

இடக் கைப்புறத்தில் x^7-ன் கெழு $\dfrac{a^7+b^7}{7}$ ஆகும். ... (A)

$$\text{வ.கை.பு.} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n\,(p-qx)^n}{n}.$$

இதில் x^7-ன் கெழுக்கள் $\dfrac{x^7\,(p-qx)^7}{7}$ என்று உறுப்பிலும், அதற்கு முன் உள்ள உறுப்புகளிலும் மட்டுந்தான் இருக்கும்.

$\dfrac{x^7\,(p-qx)^7}{7}$-ல் x^7-ன் கெழு $= \dfrac{p^7}{7}$.

$\dfrac{x^6\,(p-qx)^6}{6}$-ல் x^7-ன் கெழு $= -\dfrac{6c_1}{6}\cdot p^5 q$

$\dfrac{x^5\,(p-qx)^5}{5}$-ல் x^7-ன் கெழு $= \dfrac{5c_2}{5}\cdot p^3\cdot q^2$

$\dfrac{x^4\,(p-qx)^4}{4}$-ல் x^7-ன் கெழு $= -\dfrac{4c_3}{4}\cdot p\cdot q^3$.

$\dfrac{x^3\,(p-qx)^3}{3}$-ல் x^7-ன் கெழு $= 0$.

⋮

∴ வலக் கைப்புறத்தில் x^7-ன் கெழு

$$= \frac{p^7}{7} - p^5 q + 2p^3q^2 - pq^3. \quad \ldots \quad \ldots \quad (B)$$

∴ (A) ஐயும் (B) ஐயும் ஒப்பிட

$$\frac{a^7+b^7}{7} = \frac{p^7}{7} - p^5q + 2p^3q^2 - pq^3$$

அதாவது $\dfrac{a^7+b^7}{7} = \dfrac{(a+b)^7}{7} - (a+b)^5\,ab$

$$+\,2\,(a+b)^3.\ a^2b^2 - (a+b)\,a^3b^3.$$

$$\therefore\ (a+b)^7 - a^7 - b^7 = 7\,(a+b)^5\,ab - 14\,(a+b)^3\,a^2b^2 + 7(a+b)\,a^3b^3$$

$$= 7ab\,(a+b)\,[(a+b)^4 - 2(a+b)^2\,ab + a^2b^2]$$

$$= 7ab(a+b)[(a+b)^2\{(a+b)^2 - 2ab\} + a^2b^2]$$
$$= 7ab(a+b)[(a+b)^2(a^2+b^2) + a^2b^2]$$
$$= 7ab(a+b)[(a^2+b^2)^2 + 2ab(a^2+b^2) + a^2b^2]$$
$$= 7ab(a+b)[a^2+b^2+ab]^2$$

எனவே $(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 7(a+b)(a^2+ab+b^2)^2 . ab.$

எடுத்துக்காட்டு 19 :

$\log(1-x+x^2) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ என்று இருந்தால் $a_3 + a_6 + a_9 + \ldots = \frac{2}{3}\log 2$ என்று நிறுவுக.

$$\log(1-x+x^2) = \log\left(\frac{1+x^3}{1+x}\right)$$
$$= \log(1+x^3) - \log(1+x)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(x^3)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} \quad (A)$$

ஆனால் $\log(1-x+x^2) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots \quad \ldots \quad (B)$

$$\therefore \quad a_3 = 1 - \frac{1}{3}$$
$$a_6 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$
$$a_9 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}$$
$$a_{12} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

எனவே

$a_3 + a_6 + a_9 + \ldots$ கந்தழிக்கு

$$= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ldots\right)$$
$$= \log 2 - \frac{1}{3}\log 2$$
$$= \frac{2}{3}\log 2$$

4·6. தோராய மதிப்பறிதல்

படிக்குறி, மடக்கைத் தேற்றங்களை ஒருங்கே பயன்படுத்திச் சில கோவைகளின் தோராய மதிப்புகளை இப்பிரிவில் காணலாம். மேலும் சில எல்லைகளின் மதிப்புகளையும் இவைகளின் பயனால் அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 20 :

$(1+x)^{1+x} \simeq 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{2}$. ஈண்டு x^4, அதற்கு மிகையுள்ள படிகளைக் கொண்டுள்ள x ஆகியவைகளை நீக்கிவிடலாம். மேற்கண்ட தோராயத்தைப் பயன்படுத்தி $(1{\cdot}01)^{1{\cdot}01}$-ன் தோராய மதிப்பறிக.

$(1+x)^{1+x} = e^{\log(1+x)^{1+x}}$ என்று எழுதலாம்.

$$= e^{(1+x)\log(1+x)}$$

$$\simeq e^{(1+x)\left\{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right\}}$$ { $\log(1+x)$-ன் விரிவில் $x^4, x^5, \ldots$ ஆகியவைகளை நீக்கிவிட்டோம். }

$$\simeq e^{\left\{x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right\}}$$

இங்கேயும் x^4 உறுப்பை நீக்கி விட்டோம். (ஏன் ?)

$$\simeq 1 + \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2!}\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)^3 + \ldots$$

$$\simeq 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}(x^2 + x^3) + \frac{1}{3!}x^3$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{2}.$$

எனவே,

$$(1+x)^{1+x} \simeq 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{2}.$$

$x = 0\cdot01$ என ஈடு செய்தால்

$$(1\cdot01)^{1\cdot01} \simeq 1 + 0\cdot01 + 0\cdot0001 + \frac{0\cdot000001}{2}$$

$$= 1.0101005$$

$$\therefore\ (1.01)^{1.01} \simeq 1.0101005$$

பயிற்சி 4 (a)

1. $\log\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{2n}{n^2+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^5 + \dots$ என்று காட்டுக.

2. $\frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2x-1)^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2x-1)^5} + \dots$ என்று நிறுவுக.

3. $\log\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots$ என்று நிறுவுக.

4. $-1 < x < \frac{1}{3}$ ஆனுல், $2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) = \frac{2x}{1+x} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1-x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{1-x}\right)^3 \dots \dots$ என்று காட்டுக.

5. $n < 1$ ஆனுல் $\frac{1}{1+n} + \frac{1}{2(1+n)^2} + \frac{1}{3(1+n)^3} + \dots \dots \infty = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \dots\ \infty$ என்று காட்டுக.

6. $\log_e y = 2\left[\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5 + \dots\right]$ என்று காட்டுக.

7. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^3} + \ldots$

$$= 2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7^5} + \ldots\right)$$

எனக் காட்டு.

8. $\frac{3}{10}\left[\log_e 10 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2^{14}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2}{2^{21}} + \ldots\right]$

$= \log_e 2$ என்று நிறுவுக.

9. $\log 3 = 1 + \frac{1}{3.2^2} + \frac{1}{5.2^4} + \frac{1}{7.2^6} + \ldots$

எனக் காட்டு.

10. $\log_e\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2.3(n+1)^2}$

$- \frac{1}{3.4(n+1)^3} + \ldots \infty$ என்று நிரூபி.

11. $\log_e 10 = 3 \log 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^3} - \ldots\ldots$

என்று காட்டு.

12. $\log 3 = \log 2 + 2\left\{\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} + \ldots\right\}$

என்று காட்டு.

13. $\log_e \sqrt{12} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{4^2}$

$+ \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)\frac{1}{4^3} + \ldots \infty$ என்று காட்டுக.

14. $\log_e \sqrt{10} = \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9^2} + \ldots\right)$

$+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9^5} + \ldots \ldots\right)$ என்று காண்பி.

15. $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3$

$+ \frac{1}{5}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^5 + \ldots$ என்று காட்டுக.

(B)

கீழ்வரும் கந்தழித் தொடர்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க:

1. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{5}{3.4.5}+\frac{9}{5.6.7}+\frac{13}{7.8.9}+\dots\dots \quad \infty$

2. $\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{6.7.8}+\dots \quad \dots \quad \dots \quad \infty$

3. $\frac{1}{1.1.3}+\frac{1}{2.3.5}+\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{4.7.9}+\dots\dots \quad \infty$

4. $\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}-\frac{1}{4.5.6}+\dots\dots \quad \infty$

5. $\frac{5}{1.2.3}+\frac{7}{3.4.5}+\frac{9}{5.6.7}+\dots \quad \dots \quad \infty$

6. $\frac{1}{1.2.4}+\frac{1}{3.4.6}+\frac{1}{5.6.8}+\dots \quad \dots \quad \infty$

7. $\frac{4x}{2.3.4}+\frac{7x^2}{3.4.5}+\frac{10x^3}{4.5.6}+\dots \quad \dots \quad \infty$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n+26}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{10^n}.$

9. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2+5n-2}{n(n+1)(n+2)} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

10. $\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{9} + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{9^2}+ \quad \dots$

11. $\frac{x^2}{1.3}+\frac{x^4}{3.5}+\frac{x^6}{5.7}+ \quad \dots \infty.$

12. $\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\frac{4}{5}x^5+\dots \infty. \ (|n|<1)$

(c)

1. $\log(1+x+x^2+x^3)$-ன் விரிவை ஏறும் வரிசையில் எழுதி, x^n-ன் கெழு, n ஓர் ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருந்தால் $\frac{1}{n}$ என்றும், அல்லது n ஆனது $4m+2$, $4m$ என்ற அமைப்பில் இருந்தால் x^n-ன் கெழு முறையே $\frac{1}{n}$, $-\frac{3}{n}$ ஆகும் என்றும் நிறுவுக.

2. $|x| < 1$ ஆனால் $\log\left(\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}\right)$ என்ற விரிவில் x^{2r}-ன் கெழு பூச்சியமாகும்.

3. $\log(6x^2-17x+12)$ ஐ x-ன் ஏறு வரிசையில் எழுதி, $|x| < \frac{4}{3}$ என்றால் x^n-ன் கெழு $-\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ என்று காட்டுக.

4. $|x| < 1$ ஆனால், $\log(3+2x-x^2)$-ன் விரிவை எழுதி அதில் x^n-ன் கெழு $\frac{1}{n}\left\{(-1)^{n-1} - \frac{1}{3^n}\right\}$ என்று காட்டு.

5. $\log(1-x+x^2-x^3+x^4)$-ன் விரிவை ஏறு வரிசையில் எழுதி x^{5n}-ன் கெழு $(-1)^{n-1}\frac{4}{5n}$ என்று காண்பி.

6. $|x| < \frac{1}{2}$ ஆனால் $\log_e(1+3x+2x^2)$ ஐ x-ன் ஏறு வரிசையில் எழுதி, x^n-ன் கெழு $(-1)^n\frac{2^n+1}{n}$ என்று காண்பி.

7. $\log\frac{4}{1-x-2x^2}$ என்ற விரிவில் x^n-ன் கெழு $\frac{1}{n}$ அல்லது $-\frac{2}{n}$ (முறையே n, 3-ன் மடங்காக இராது; n, 3-ன் மடங்காக இருக்கும்) என்று காட்டு.

8. $|x| < \frac{1}{3}$ ஆனால், $\log_e(1+5x+6x^2)$-ல் x^n-ன் கெழு $(-1)^n\frac{2^n+3^n}{3}$ எனக் காண்பி.

9. $\log(1-3x+2x^2)$ ஐ இரு வழிகளில் விரித்து,

$$3^n - n.3^{n-2}.2 + \frac{n(n-3)}{1.2}3^{n-4}.2^2$$
$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}.3^{n-6}.2^3 + \ldots = 2^n + 1$$

என்று நிறுவுக.

10. x மிகச் சிறியதாக இருப்பின்,

$$\log\left\{(1+x)^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}}\right\} = \log_e 2 - \frac{x^2}{9}$$

தோராயமாக.

11. n மிகப் பெரிதாக இருப்பின்,

$$\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = e^2\left(1 + \frac{2}{3x^2}\right)$$ தோராயமாக.

12. மிகச் சிறிய x-க்கு $\log\frac{1+2e^x}{3} = \frac{2}{3}x + \frac{x^2}{9}$ தோராயமாக.

5. தொடர்களின் கூட்டல்

5·1. சென்ற அத்தியாயங்களில் சில வகைப்பட்ட தொடர்களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் கண்டோம். இனி இவ்வத்தியாயத்தில் வேறு வகைப்பட்ட தொடர்களின் தொகைகளைக் காணும் முறையினை விளக்குவோம்.

குறியீடுகள் :

நாம் $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$, . என்று தொடரின் உறுப்புகளைக் குறிப்பிடுவோம். S_n என்றும், S_∞ என்றும் முறையே முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையினையும், கந்தழித் தொடரின் குவி கூட்டுத் தொகையினையும் குறிப்போம்.

$$\therefore \quad S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$$

$$S_\infty = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \infty \quad \text{(குவி தொடர்)}$$

5·2. வகை 1 :

வேறுபாடு முறை :

தொகை காணப் பொதுவாக u_r என்ற உறுப்பை $v_{r+1} - v_r$ என்றுவது, அன்றி, $v_r - v_{r+1}$ என்றுவது அமைத்தால் நமக்கு

$$
\begin{aligned}
u_n &= v_{n+1} - v_n \\
u_{n-1} &= v_n - v_{n-1} \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
u_2 &= v_3 - v_2 \\
u_1 &= v_2 - v_1
\end{aligned}
$$

கூட்டிச் சமன் காணின்,

$$S_n = v_{n+1} - v_1$$

$u_n = v_n - v_{n-1}$ என இருப்பின்,

$$S_n = v_1 - v_{n+1}$$

5·3. பகுதிப் பின்ன முறை :

சில தொடர்களில் u_r ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பகுக்கும் போது வரும் உறுப்புகளை v_{r+1}, v_r என்ற முறையில் அமைக்கலாம். இங்ஙனம் அமையும் தொடர்களின் தொகைகளைக் காணும் வழியினை எடுத்துக்காட்டுகள் கொண்டு விளக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots$ என்ற தொடரில் S_n ஐயும் S_∞ ஐயும் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட தொடரில் $u_r = \frac{1}{r(r+1)}$

$$= \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}$$

$v_r = \frac{1}{r}$ என்று எடுத்துக் கொள்.

$$\therefore \; u_r = v_r - v_{r+1}$$

$$\therefore \; u_n = v_n - v_{n+1}$$

$$u_{n-1} = v_{n-1} - v_n$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u_2 = v_2 - v_3$$

$$u_1 = v_1 - v_2$$

கூட்ட, $S_n = v_1 - v_{n+1}$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore\ S_\infty = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ S_n = 1$$

$$\therefore\ \boxed{\begin{aligned} S_n &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ S_\infty &= 1 \end{aligned}}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \ldots$ என்ற தொடரின் S_n, S_∞ அறிக.

கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் $u_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

$$= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

எனவே, $v_r = \frac{1}{r^2}$ எனக் கொண்டால்

$$\boxed{u_r = v_r - v_{r+1}}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ u_n &= v_n - v_{n+1} \\ u_{n+1} &= v_{n-1} - v_n \\ &\cdots\cdots \\ u_n &= v_2 - v_3 \\ u_1 &= v_1 - v_2 \end{aligned}$$

கூட்ட, $S_n = v_1 - v_{n+1}$

$$\therefore\ S_n = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\therefore\ S_\infty = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ S_n = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$S_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

$$S_\infty = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$\frac{1}{3.1!} + \frac{1}{4\cdot 2!} + \frac{1}{5.3!} + \ldots$ என்ற தொடரின் S_n, S_∞ காண்க.

$$u_n = \frac{1}{(n+2)n!} = \frac{(n+1)}{(n+2)!}$$

$$= \frac{(n+2)-1}{(n+2)!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}$$

எனவே $v_r = \frac{1}{(r+1)!}$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\ u_r = v_r - v_{r+1}$$

எனவே $S_n = v_1 - v_{n+1}$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{(n+2)!}$$

$$\therefore\ S_\infty = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{(n+2)!}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}$$

$$S_\infty = \frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$\frac{2}{1.3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{3.5}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{4}{5.7}\cdot\frac{1}{3^3}+\dots$$

என்ற தொடரின் தொகை காண்க.

$$u_n=\frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot\left[\frac{\frac{3}{4}}{2n-1}-\frac{\frac{1}{4}}{2n+1}\right]$$

$$=\frac{3}{4}\,\frac{(\frac{1}{3})^n}{2n-1}-\frac{1}{4}\,\frac{(\frac{1}{3})^n}{2n+1}$$

$$=\frac{1}{4}\,\frac{(\frac{1}{3})^{n-1}}{2n-1}-\frac{1}{4}\,\frac{(\frac{1}{3})^n}{2n+1}$$

எனவே

$v_n=\frac{1}{4}\cdot\frac{(\frac{1}{3})^n}{2n+1}$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\quad u_n = v_{n-1}-v_n$$

$$\therefore\quad u_{n-1} = v_{n-2}-v_{n-1}$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

$$u^2 = v_1 - v_2$$

$$u_1 = v_0 - v_1$$

கூட்ட, $S_n = v_0 - v_n$

$$S_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\,\frac{(\frac{1}{3})^n}{2n+1}$$

$$\therefore\; S_\infty = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\; S_n=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad \boxed{\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{4}\left[1 - \frac{(\frac{1}{2})^n}{2n+1}\right] \\ S_\infty &= \frac{1}{4} \end{aligned}}$$

5·4. வகை II: இவ்வகை $u_n = (a+\overline{n-1}b)(a+nb)(a+\overline{n+1}b) \ldots \ldots (a+\overline{n+r-2}\,b)$ என்ற n ஆவது உறுப்பைக் கொண்ட தொடருக்கு அமைந்ததாகும்.

இது மூவகைப் பண்புகளைக் கொண்டுள்ளதை எளிதில் அறியலாம்.

1. ஒவ்வோருறுப்பும் r காரணிகளைக் கொண்டுள்ளது.

2. ஒவ்வோருறுப்பிலுள்ள r காரணிகளும் கூட்டுத் தொடர் முறையில் b ஐப் பொது வேறுபாடாகக் கொண்டமைந்துள்ளன.

3. உறுப்புகளின் முதல் காரணிகளான $a,\ a+b,\ a+2b, \ldots$ என்பவை மேற்கூறிய b ஐப் பொது வேறுபாடாகக் கொண்டு கூட்டுத் தொடர் முறையில் அமைந்துள்ளன.

வழி முறை:

$$v_n = u_n \cdot (a+\overline{n+r-1}\,b) \text{ எனக் கொள்க.}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad v_{n-1} &= u_{n-1} \cdot (a+\overline{n+r-2}\,.\,b) \\ &= (a+\overline{n-2}\,b)(a+\overline{n-1}\,.\,b)\ldots(a+\overline{n+r-2}\,.\,b) \\ &= (a+\overline{n-2}\,b)\,.\,u_n. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad v_n - v_{n-1} = u_n\,\{(r+1)\,.\,b\}\,.$$

எனவே

$$\begin{aligned} v_n - v_{n-1} &= u_n(r+1)\,.\,b \\ v_{n-1} - v_{n-2} &= u_{n-1}(r+1)\,.\,b \\ \ldots \quad & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ v_2 - v_1 &= u_2(r+1)\,.\,b \\ v_1 - v_0 &= u_1(r+1)\,.\,b \end{aligned}$$

$$\text{கூட்ட} \quad v_n - v_0 = S_n(r+1)\,.\,b$$

$$\therefore \quad \boxed{S_n = \frac{v_n - v_0}{(r+1) \cdot b}} \quad (\text{நினைவிற் கொள்க.})$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots$ என்ற தொடரின் S_n காண்க.

ஈண்டு $u_n = n(n+1)(n+2)$

எனவே வகை II-ல் கூறப்பட்ட பண்புகளை இத்தொடர் ஏற்றுக் கொண்டுள்ளது.

$$\therefore \quad v_n = (n+3) . u_n .$$

$$v_0 = 3 . u_0 = 3 . 0 = 0$$

ஈண்டு $r = 3, \; b = 1.$

$$\therefore \quad S_n = \frac{v_n - v_0}{(r+1) b} = \frac{v_n}{4.1} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$3.7.11.13 + 7.11.15.17 + 11.15.19.21 + \ldots$ என்ற தொடரின் S_n காண்க.

$$u_n = (4n-1)(4n+3)(4n+7)(4n+9).$$

$4n+9 = (4n+11) - 2$ என்று எழுதுதலை நோக்குக.

$$\therefore \quad u_n = (4n-1)(4n+3)(4n+7)(4n+11) - 2(4n-1)(4n+3)(4n+7).$$

$$= u_n^{(1)} - 2 u_n^{(2)}$$

ஈண்டு $u_n^{(1)} = (4n-1)(4n+3)(4n+7)(4n+11)$

$$u_n^{(2)} = (n-1)(4n+3)(4n+7).$$

$$S_n^{(1)} = u_1^{(1)} + u_2^{(1)} + \ldots \ldots + u_n^{(1)}$$

$S_n^{(2)} = u_1^{(2)} + u_2^{(2)} + \ldots \ldots + u_n^{(2)}$ என்றும் கொண்டால்

$$S_n = S_n^{(1)} - 2 S_n^{(2)}.$$

எனவே,

$$v_n^{(1)} = (4n+15)\,u_n^{(1)}$$

$v_n^{(2)} = (4n+11)\,u_n^{(2)}$ என்று கொள்வோம்.

$$S_n^{(1)} = \frac{v_n^{(1)} - v_0^{(1)}}{(r+1)\,b} = \frac{(4n+15)\,u_n^{(1)} - 15\,.\,u_0^{(1)}}{(4+1)\,.\,4}$$

$$S_n^{(2)} = \frac{v_n^{(2)} - v_0^{(2)}}{(r+1)\,b} = \frac{(4n+11)\,u_n^{(2)} - 11\,.\,u_0^{(2)}}{(3+1)\,.\,4}$$

$$\therefore\ S_n^{(1)} = \frac{(4n-1)(4n+3)(4n+7)(4n+11)(4n+15) - 15.11.7.3.(-1)}{20}$$

$$S_n^{(2)} = \frac{(4n-1)(4n+3)(4n+7)(4n+11) - 11.7.3.(-1)}{16}$$

$$\therefore\ S_n = (4n-1)(4n+3)(4n+7)(4n+11)\left\{\frac{4n+15}{20} - \frac{2}{16}\right\} + \frac{15.11.7.3}{20} - \frac{2.11.7.3}{16}$$

$$= (4n-1)(4n+3)(4n+7)(4n+11)\,\frac{(16n+60-10)}{80} + \frac{(60-10)\,11.7.3}{80}$$

$$= \frac{(4n-1)(4n+3)(4n+7)(4n+11)(8n+25)}{40} + \frac{3\,.\,5\,.\,7\,.\,11}{8}.$$

எடுத்துக்காட்டு 7:

$1.5^2+5.9^2+9.13^2+\dots\dots$ என்ற தொடரில் S_n காண்க.

$$u_n = (4n-3)(4n+1)^2$$

$$= (4n-3)(4n+1)\,(4n+1)$$

$$= (4n-3)(4n+1)\ \{\overline{4n+5}-4\}$$

$$= (4n-3)(4n+1)(4n+5) - 4\,(4n-3)(4n+1).$$

$$\therefore\ S_n = \sum_{r=1}^{n} (4n-3)(4n+1)(4n+5)$$

$$- 4 \sum_{r=1}^{n} (4n-3)(4n+1).$$

$$= \frac{v_n^{(1)} - v_0^{(1)}}{(r+1)b} - 4\,\frac{v_n^{(2)} - v_0^{(2)}}{(r+1)b}$$

$$= \frac{v_n^{(1)} - v_0^{(1)}}{(3+1)\,.\,4} - 4\,.\,\frac{v_n^{(2)} - v_0^{(2)}}{(2+1)\,.\,4}$$

$$= \frac{(4n-3)(4n+1)(4n+5)(4n+9) - (-3.)1.5.9}{16}$$

$$- 4\,.\,\frac{(4n-3)(4n+1)(4n+5) - (-3).1.5}{12}$$

$$= \frac{(4n-3)(4n+1)(4n+5)}{4}\left\{\frac{4n+9}{4} - \frac{4}{3}\right\}$$

$$+ \frac{3.1.5}{4}\left\{\frac{9}{4} - \frac{1}{3}\right\}$$

$$= \frac{(4n-3)(4n+1)(4n+5)(12n+11)}{48} + \frac{15}{4}\,.\,\frac{23}{12}$$

$$= \frac{(4n-3)(4n+1)(4n+5)(12n+11)}{48} + \frac{115}{16}\,.$$

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots\dots$ இத் தொடரின் S_n காண்க.

$$u_n = n^4$$

$$= A\,n\,(n+1)(n+2)(n+3) + B\,n\,(n+1)(n+2)$$

$$C n (n+1) + D n + E.$$

$$\left.\begin{array}{l} A = 1 \\ B = -6 \\ C = 7 \\ D = -1 \\ E = 0 \end{array}\right\}$$

$$\therefore \quad n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3) - 6n(n+1)(n+2) + 7n(n+1) - n + 0$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5} - \frac{6n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + \frac{7(n)(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}.$$

எனவே, $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$

$$- \frac{3}{2}\, n(n+1)(n+2)(n+3) + \frac{7}{3}\, n(n+1)(n+2) - \frac{n(n+1)}{2}.$$

5·5. வகை III : இவ்வகையில்

$$u_n = \frac{1}{\{a+(n-1)b\} \quad \{a+nb\} \quad \{a+(n+1)b\} \ldots \ldots \{a+(n+r-2)b\}}$$

என்று அமைந்திருக்கும்.

$$v_n = \frac{1}{(a+nb)\,(a+\overline{n+1}\,b) \ldots \ldots (a+\overline{n+r-2}\,.\,b)}$$

$$\therefore \quad v_n = (a+\overline{n-1}\,.\,b)\,.\,u_n.$$

$$\therefore \quad v_{n-1} = (a+\overline{n-2}\,b)\,.\,u_{n-1}$$

$$= \frac{(a+\overline{n-2}\,b)}{(a+\overline{n-2}\,b)\,(a+\overline{n-1}\,b) \ldots (a+\overline{n+r-3}\,b)}$$

$$= \frac{1}{(a+\overline{n-1}\,b)\;(a+nb)\;(a+\overline{n+r-3}\,b)} \times \frac{(a+\overline{n+r-2}\,b)}{(a+\overline{n+r-2}\,b)}$$

$$= (a+\overline{n+r-2}\,b)\,.\,u_n.$$

எனவே,

$$v_{n-1} - v_n = (r-1)\, b \cdot u_n$$

$$\therefore \quad v_{n-2} - v_{n-1} = (r-1)\, b \cdot u_{n-1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$v_0 - v_1 = (r-1)\, b \cdot u_1$$

கூட்ட, நாம் பெறுவது,

$$v_0 - v_n = (r-1)\, b \cdot S_n$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{v_0 - v_n}{(r-1) \cdot b} \text{ (நினைவிற் கூர்க).}$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$\dfrac{1}{1.2.3.4} + \dfrac{1}{2.3.4.5} + \ldots \ldots$ என்ற தொடரின் S_n, S_∞ அறிக.

ஈண்டு $u_n = \dfrac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)\,\,(n+3)}$

(இது வகை III-ல் அடங்குவது காண்க.)

எனவே $v_n = \dfrac{1}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$

$$v_{n-1} = \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}$$

$$v_n - v_{n-1} = \frac{n - n - 3}{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$$

$$= \frac{-3}{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} = -3u_n$$

$$\therefore \quad v_n - v_{n-1} = -3u_n$$

$$v_{n-1} - v_{n-2} = -3u_{n-1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$v_1 - v_0 = -3u_1$$

கூடுதல் காணின்

$$v_n - v_0 = -3 . S_n .$$

$$\therefore \; S_n = \frac{1}{3}\left[v_0 - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right]$$

$$\therefore \; S_\infty = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \; \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right]$$

$$= \frac{1}{18}.$$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots \quad \dots$$

என்ற தொடரின் S_n, S_∞ காண்க.

$$u_n = \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)}$$

எனவே,

$$v_n = \frac{2}{n+1} \; ; \; b = 1, \; r = 2.$$

$$\therefore \; S_n = \frac{v_0 - v_n}{b(r-1)}$$

$$= \frac{\frac{2}{1} - \frac{2}{n+1}}{1(2-1)}$$

$$= 2 - \frac{2}{n+1}$$

$$\therefore \; S_\infty = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \; S_n$$

$$= 2.$$

எடுத்துக்காட்டு 11 :

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1^2}{1^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1^2+2^2}{1^3+2^3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1^2+2^2+3^2}{1^3+2^3+3^3}+\dots\dots$$

என்ற தொடரில் S_n, S_∞ அறிக.

$$\text{ஈண்டு } u_n = \cdot\frac{1}{n+3}\ \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{1^3+2^3+\dots\dots+n^3}$$

$$=\frac{1}{n+3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)\cdot 4}{6\cdot n^2(n+1)^2}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(n+3)}\cdot\frac{(2n+1)}{n(n+1)}$$

$$=\frac{2}{3}\ \frac{(2n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$(2n+1)(n+2) = An(n+1)+Bn+C$$

$$=2n(n+1)+3n+2.$$

$$\therefore\ u_n=\frac{2}{3}\left\{\frac{2n(n+1)+3n+2}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$$

$$=\frac{4}{3}\ \frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\therefore\ S_n=\frac{4}{3}\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right\}$$

$$+2\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}\div 2$$

$$+\frac{4}{3}\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}\div 3.$$

$$\left[\because\ S_n=\frac{v_0-v_n}{b(r-1)}\right]$$

$$S_\infty=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{37}{54}.$$

5·6. வகை IV :

$$\frac{a}{b}+\frac{a(a+x)}{b(b+x)}+\frac{a(a+x)(a+2x)}{b(b+x)(b+2x)}+\dots$$

என்ற தொடரில் S_n காண்க.

$$\text{ஈண்டு } u_n=\frac{a(a+x)(a+2x)\dots(a+\overline{n-1}x)}{b(b+x)(b+2x)\dots(b+\overline{n-1}x)}+\dots$$

என்பதறிக.

$$v_n=\frac{a(a+x)(a+2x)\dots(a+\overline{n-1}x)}{b(b+x)(b+2x)\dots(b+\overline{n-1}x)}\times(a+nx)$$

எனக் கொள்வோம்.

எனவே $v_n=u_n(a+nx)$.

$$\therefore\quad v_{n-1}=\frac{a(a+x)\dots(a+\overline{n-2}x)}{b(b+x)(b+2x)\dots(b+\overline{n-2}x)}(a+\overline{n-1}x)$$

$$=\frac{a(a+x)\dots(a+\overline{n-2}x)(a+\overline{n-1}x)}{b(b+x)\dots(b+\overline{n-2}x)}$$

$$=(b+\overline{n-1}x)u_n.$$

$$\therefore\quad v_n-v_{n-1}=(a-b+x)u_n.$$

எனவே $v_{n-1}-v_{n-2}=(a-b+x)u_{n-1}$

$$\dots\quad\dots\quad\dots$$

$$v_1-v_0=(a-b+x)u_1$$

கூட்ட $\quad v_n-v_0=(a-b+x)S_n.$

$$\therefore\quad \boxed{S_n=\frac{v_n-v_0}{a-b+x}.}$$ (நினைவிற் கூர்க.)

எடுத்துக்காட்டு 12 :

$\frac{3}{8}+\frac{3.5}{8.10}+\frac{3.5.7}{8.10.12}+\dots$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

$$u_n = \frac{3 \,.\, 5 \,.\, 7 \dots (2n+1)}{8.10.12 \dots (2n+6)}$$

$$\therefore \quad v_n = \frac{3 \,.\, 5 \,.\, 7 \dots (2n+1)}{8 \,.\, 10 \,.\, 12 \dots (2n+6)} \,.\, (2n+8)$$

$$v_{n-1} = \frac{3 \,.\, 5 \,.\, 7 \dots (2n-1)}{8.10.12 \dots (2n+4)} \,.\, (2n+1)$$

$$\therefore \quad v_n - v_{n-1} = \frac{3 \,.\, 5 \,.\, 7 \dots (2n+1)}{8.10.12 \dots (2n+6)} [(2n+8) - (2n+6)]$$

$$= (2n+8)\, u_n - (2n+1)\, u_{n-1}$$

$$= (2n+8)\, u_n - (2n+6)\, u_n$$

$$= -\, 3u_n.$$

$$\therefore \quad v_1 - v_0 = -\, 3u_1$$

$$v_2 - v_1 = -3u_2$$

$$v_3 - v_2 = -3u_3.$$

$$\dots \qquad \dots$$

$$\therefore \quad \underline{v_n - v_{n-1} = -3u_n}$$

$$\therefore \quad v_n - v_0 = -3S_n.$$

$$\therefore \quad S_n = -\frac{v_n}{3} + \frac{v_0}{3}; \text{ இங்கு } v_0 = 3.$$

$$\therefore \quad S_n = 1 - \frac{1}{3} \,.\, \frac{3.5.7 \dots (2n+1)\,(2n+8)}{8.10.12 \dots (2n+6)}$$

எடுத்துக்காட்டு 13 :

$\sum_{1}^{n} u_n = \sum_{1}^{n} \frac{2.5.8 \dots (3n-1)}{3.6.9 \dots 3n}$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

$$u_n = \frac{2.5.8 \dots (3n-1)}{3.6.9 \dots 3n}.$$

$$\therefore \quad v_n = \frac{2.5.8 \dots (3n-1)}{3.6.9 \dots 3n} (3n+2)$$

$$v_{n-1} = \frac{2.5.8 \ldots (3n-4)}{3.6.9 \ldots (3n-3)} . (3n-1)$$

$$\therefore \quad v_n - v_{n-1} = \frac{2.5.8 \ldots (3n-1)}{3.6.9 \ldots 3n} (3n+2) - \frac{2.5.8 \ldots (3n-4)}{3.6.9 \ldots (3n-3)} (3n-1)$$

$$= (3n+2) . u_n - 3n . u_n.$$

$$\therefore \quad v_n - v_{n-1} = 2u_n$$

$$v_1 - v_0 = 2u_1$$

$$v_2 - v_1 = 2u_2$$

$$v_3 - v_2 = 2u_3$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\underline{v_n - v_{n-1} = 2u_n.}$$

$$\therefore \quad v_n - v_0 = 2 (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n).$$

இங்கு $v_0 = 2.$

$$\therefore \quad v_n - 2 = 2 S_n.$$

$$\therefore \quad 2 S_n = v_n - 2.$$

$$S_n = \frac{1}{2} v_n - 1$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{2.5.8 \ldots (3n-1) (3n+2)}{3.6.9 \ldots \ldots \ldots \ldots 3n} - 1$$

எடுத்துக்காட்டு 14 :

$\frac{2}{3} + \frac{2.6}{3.7} + \frac{2.6.10}{3.7.11} + \ldots \ldots$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

$$u_n = \frac{2.6.10 \ldots (4n-2)}{3.7.11 \ldots (4n-1)}$$

$$v_n = \frac{2.6.10 \ldots (4n-2)}{3.7.11 \ldots (4n-1)} \times (4n+2)$$

$$v_{n-1} = \frac{2.6.10 \ldots (4n-6)}{3.7.11 \ldots (4n-5)} \times (4n-2)$$

$$\therefore \quad v_n - v_{n-1} = (4n+2)\,u_n - (4n-2)\,u_{n-1}$$
$$= (4n+2)\,u_n - (4n-1)\,u_n$$
$$= u_n\,[4n+2-4n+1]$$
$$= 3\,.\,u_n.$$

$$\therefore \quad v_1 - v_0 = 3u_1$$
$$v_2 - v_1 = 3u_2$$
$$v_3 - v_2 = 3u_3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$v_n - v_{n-1} = 3u_n$$

$\therefore \quad v_n - v_0 = 3\,\Sigma u_n = 3\,S_n.$ இங்கு $v_0 = 2.$

$$\therefore \quad S_n = \frac{1}{3}\,[v_n - v_0]$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2.6.10 \ldots (4n+2)}{3.7.11 \ldots (4n-1)} - 2\right]$$

பயிற்சி 5 (a)

பின்வரும் தொடர்களின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையும் முடியுமானால் கந்தழிக் கூட்டுத் தொகையும் காண்க:

I. 1. $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \ldots\ldots$

2. $\frac{1}{\underline{|2}} + \frac{2}{\underline{|3}} + \frac{3}{\underline{|4}} + \ldots\ldots$

3. $\frac{5}{1.2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{2.3} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{9}{3.4} \cdot \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots$

4. $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots\ldots$

5. $1(\lfloor 1) + 2\cdot(\lfloor 2) + 3(\lfloor 3) + \ldots\ldots$

6. $\dfrac{1}{(1+x)(1+2x)} + \dfrac{1}{(1+2x)(1+3x)} + \dfrac{1}{(1+3x)(1+4x)} + \ldots\ldots$

7. $\dfrac{1}{x(x+a)} + \dfrac{1}{(x+a)(x+2a)} + \dfrac{1}{(x+2a)(x+3a)} + \ldots$

8. $\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{2}{1.3.5} + \dfrac{3}{1.3.5.7} + \dfrac{4}{1.3.5.7.9} + \ldots\ldots$

9. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{3x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \ldots$

பின்வரும் தொடர்களின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

II. 1. $1.3.5.7 + 3.5.7.9 + 5.7.9.11 + \ldots\ldots$

2. $1.2.4^2 + 2.3.5^2 + 3.4.6^2 + \ldots\ldots$

3. $1.2.3.4 + 2.3.4.5 + 3.4.5.6 + \ldots\ldots$

4. $4.7.10 + 7.10.13 + 10.13.16 + \ldots\ldots$

5. $1.2.3 + 2.3.5 + 3.4.7 + 4.5.9 + \ldots\ldots$

6. $3.7.11 + 7.11.15 + 11.15.19 + \ldots\ldots$

7. $1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \ldots\ldots$

8. $1.1^2 + 2(1^2+2^2) + 3(1^2+2^2+3^2) + \ldots\ldots$

9. $1.3.4 + 4.5.5 + 7.7.6 + 10.9.7 + \ldots\ldots$

III. பின்வரும் தொடர்களின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையும், கந்தழிக் கூட்டுத் தொகையும் காண்க :

1. $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \dfrac{1}{3.4.5} + \ldots\ldots$

2. $\dfrac{4}{2.3.4} + \dfrac{7}{3.4.5} + \dfrac{10}{4.5.6} + \ldots\ldots$

3. $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \dots$

4. $\frac{1}{1.3.7} + \frac{1}{3.5.9} + \frac{1}{5.7.11} + \dots$

5. $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.6} + \dots$

6. $\frac{4}{2.3.5} + \frac{7}{3.4.6} + \frac{10}{4.5.7} + \dots$

7. $\frac{1}{1.3.4} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{5}{3.5.6} + \dots \infty$

8. $\frac{11}{1.4.6} + \frac{12}{2.5.7} + \frac{13}{3.6.8} + \dots \infty$

9. $\frac{1}{1.4.7} + \frac{1}{4.7.10} + \frac{1}{7.10.13} + \dots$

10. $\frac{2}{1.4.5} + \frac{3}{2.5.6} + \frac{4}{3.6.7} + \dots$

IV. 1. $\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \dots$ n உறுப்புகள்.

2. $\frac{11}{14} + \frac{11.13}{14.16} + \frac{11.13.15}{14.16.18} + \dots \infty$

3. $\frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.6} + \frac{1.3.5}{4.6.8} + \dots \infty$

4. $\frac{4}{5} + \frac{4.7}{5.8} + \frac{4.7.10}{5.8.11} + \dots$ n உறுப்புகள்

5. $\frac{2}{4} + \frac{2.5}{4.7} + \frac{2.5.8}{4.7.10} + \dots$,,

6. $\frac{1}{4} + \frac{1.2}{4.5} + \frac{1.2.3}{4.5.6} + \dots$,,

5·7. வேறுபாடுகள் வழிக் கூட்டுத்தொகை காணல்

$u_1, u_2, u_3, \dots u_n, \dots$ என்ற தொடர் முறையினை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$v_n = u_{n+1} - u_n$ என்க.

எனவே நமக்கு,

$v_1, v_2, v_3, \ldots v_n, \ldots$ என்ற தொடர் முறை கிடைக்கின்றது.

5·8. இதை, முதல் வேறுபாட்டு வரிசைத் தொடர் முறை என்று கூறுவோம். இத்தொடர் முறையில் இருந்து $v_2 - v_1, v_3 - v_2, \ldots \ldots, v_{n+1} - v_n, \ldots$ என்ற தொடர் முறையினை அறியலாம். இது $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ என்ற தொடர் முறையின் முதல் வேறுபாட்டு வரிசைத் தொடர் முறையாகும்; ஆனால், $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ என்ற தொடர் முறையின் இரண்டாம் வேறுபாட்டு வரிசைத் தொடர் முறை என்பதை எளிதில் உணரலாம். இதுபோல் $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ என்ற தொடர்முறையின் மூன்றும், நான்காம் ... ... வேறுபாட்டு வரிசைத் தொடர் முறைகளைக் கண்டறியலாம்.

தொகைகள் காண, தொடர்களின் அமைப்பு விதி கொடுக்கப் படாமல், அதன் முதல் உறுப்புகளில் சிலவற்றைக் கொடுத்திருந் தால் வேறுபாட்டு வரிசைத் தொடர் முறைகளைப் பயன் படுத்தலாம். இவ்வழியினை எடுத்துக்காட்டுகளின் துணை கொண்டு நன்கு அறிந்து கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$9 + 22 + 168 + 498 + \ldots$ என்ற தொடரின் n ஆவது உறுப்பினையும், S_n ஐயும் அறிக.

முதற்கண் கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் அமைப்பு விதி மறைந்துள்ளமையை நோக்குதல் வேண்டும். கீழ்க்கண்ட முறைப்படி உறுப்புகளை எழுதி வேறுபாடுகளைக் காண்போம்.

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	...	...
9	22	59	168	498	...	...

v_1	v^2	v_3	v_4	...	...
13	37	109	395 (முதற்றொடர் முறை)		

w_1	w_2	w_3	
24	72	216	... (இரண்டாம் தொடர் முறை)

இரண்டாம் தொடர் முறை ஒரு பெருக்குத் தொடர் முறை என்பதை அறியலாம்.

ஆனால், $w_n = v_{n+1} - v_n$

$\therefore \quad w_{n-1} = v_n - v_{n-1}$

$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$

$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$

$w_2 = v_3 - v_2$

$w_1 = v_2 - v_1$

கூடுதல் கண்டால் $w_1 + w_2 + \ldots + w_{n-1} = v_n - v_1$

அதாவது $24+72+216+\ldots$ $(n-1)$ உறுப்புகள் $= v_n - v_1$

$$\therefore \quad 24 \cdot \frac{(3^{n-1}-1)}{3-1} = v_n - v_1$$

$(ie)\ 12\,(3^{n-1}-1) = v_n - v_1$

$$\therefore \quad v_n = v_1 + 12\,(3^{n-1}-1) = 13 + 12 \cdot 3^{n-1} - 12$$
$$= 12 \cdot 3^{n-1} + 1$$

இனி $v_1 = u_2 - u_1$

$v_2 = u_3 - u_2$

$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$

$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$

$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$

கூடுதல் கண்டால் $v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1} = u_n - u_1$

அதாவது $12 \cdot 1 + 1 = u_2 - u_1$

$12 \cdot 3 + 1 = u_3 - u_2$

$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$

$12 \cdot 3^{n-2} + 1 = u_n - u_{n-1}$

கூடுதல் கண்டால் $12\,(1 + 3 + \ldots + 3^{n-2}) + (n-1) = u_n - u_1$

அதாவது $12 \cdot 1 \cdot \dfrac{(3^{n-1}-1)}{3-1} + n - 1 = u_n - u_1$

$\therefore\ u_n = u_1 + 6 \cdot 3^{n-1} - 6 + n - 1 = 2 \cdot 3^n + \overline{n-1} + 3$
$= 2 \cdot 3^n + n + 2$

$$\therefore\ S_n = 2\,[3+3^2+ \dots +3^n] + \frac{n\,(n+1)}{2} + 2n$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot \frac{(3^{n-1}-1)}{3-1} + \frac{n\,(n+1)}{2} + 2n$$

$$= 3^n + \frac{n\,(n+1)}{2} + 2n - 3.$$

எடுத்துக்காட்டு 16 :

$6+9+14+23+40+\dots$ இத்தொடரின் n ஆவது உறுப்பினையும், S_n ஐயும் கண்டுபிடிக்க.

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	... ...
6	9	14	23	40	... ...

v_1	v_2	v_3	v_4	
3	5	9	17	... (முதல் வேறுபாடுகள்)

w_1	w_2	w_3	
2	4	8	... (இரண்டாம் வேறுபாடுகள்)

இரண்டாம் வேறுபாடுகள் ஒரு பெருக்குத் தொடர் முறையாகும்.

ஈண்டு $w_1 = v_2 - v_1$

$w_2 = v_3 - v_2$

$\dots \quad \dots \quad \dots$

$w_{n-1} = v_n - v_{n-1}$

கூடுதல் கண்டால் $w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1} = v_n - v_1$

அதாவது $2+4+8+\dots$ $(n-1)$ உறுப்புகள் $= v_n - v_1$

அதாவது $2 \cdot \frac{(2^{n-1}-1)}{2-1} = v_n - v_1$

எனவே $v_n = v_1 + 2^n - 2 = 3 + 2^n - 2$
$= 2^n + 1$

இனி $v_1 = 2+1 = u_2 - u_1$

$$v_2 = 2^2+1 = u_3 - u_2$$

$$v_3 = 2^3+1 = u_4 - u_3$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$v_{n-1} = 2^{n-1}+1 = u_n - u_{n-1}$$

கூடுதல் காண $2+2^2+ \dots +2^{n-1} + (n-1) + u_n - u_1$

அதாவது $2 \cdot \frac{(2^{n-1}-1)}{2-1} + n-1 = u_n - u_1$

$$\therefore \quad u_n = u_1 + 2^n - 2 + n - 1 = 6 + 2^n + n - 3 = 2^n + n + 3.$$

$$\therefore \quad S_n = (2 + 2^2 + \dots + 2^n) + \frac{n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= 2^{n+1} + \frac{n(n+1)}{2} + 3n - 2.$$

எடுத்துக்காட்டு 17 :

$4 + 14 + 30 + 52 + 80 + 114 + \dots$ என்ற தொடரின் n ஆவது உறுப்பினையும், S_n ஐயும் காண்க.

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	...
4	14	30	52	80	114	...

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
10	16	22	28	34

(முதல் வேறுபாடுகள்)

முதல் வேறுபாடுகள் ஒரு கூட்டுத் தொடர் முறையில் அமைந்துள்ளமையை நோக்குக.

$$v_1 = u_2 - u_1$$

$$v_2 = u_3 - u_1$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

கூட்ட $v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} = u_n - u_1$

அதாவது $10 + 16 + 22 + \dots (n-1)$ உறுப்புகள் $= u_n - u_1$

$$\therefore\ u_n = u_1 + \frac{n-1}{2}\{20 + (n-2).6\}$$

$$\therefore\ u_n = 4 + \frac{n-1}{2}\{20 + 6n - 12\}$$

$$= 4 + \frac{n-1}{2}.(6n+8)$$

$$= 4 + (n-1)(3n+4) = 3n^2 + n$$

$$S_n = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + \dots + n)$$

$$= 3\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 18 :

$8+4+2+8+28+68+134+\dots\dots$ —இத்தொடரின் u_n ஐயும், S_n ஐயும் காண்க.

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	...
8	4	2	8	28	68	134	...

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	
−4	−2	6	20	40	66	...

(முதல் வேற்றுமைகள்)

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
2	8	14	20	26	...

(இரண்டாம் வேற்றுமைகள்)

இரண்டாம் வேற்றுமைகள் ஒரு கூட்டுத்தொகை முறையில் அமைந்துள்ளமையை நோக்குக.

எனவே $v_1 = u_2 - u_1$

$$v_2 = u_3 - u_2$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

கூட்ட $v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} = u_n - u_1$

அதாவது $2 + 8 + \dots (n-1)$ உறுப்புகள் $= u_n - u_1$

$$\therefore \quad u_n = u_1 + \frac{n-1}{2} \left\{ 4 + \overline{n-2} \cdot 6 \right\}$$

$$= u_1 + \frac{n-1}{2}(6n-8)$$

$$= 8 + (n-1)(3n-4)$$

$$= 3n^2 - 7n + 12.$$

$$S_n = \frac{3\, n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{7\, n(n+1)}{2} + 12\, n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{7n(n+1)}{2} + 12n.$$

எடுத்துக்காட்டு 19 :

$\frac{4}{1!} + \frac{11}{2!} + \frac{22}{3!} + \frac{37}{4!} + \frac{56}{5!} + \dots = 8e - 1$ எனக் காட்டுக.

4 11 22 37 56 … … என்ற தொடர் முறையைக் காண்க.

இத் தொடர் முறையின் முதல் வேற்றுமை வரிசையினைக் காண்போம்.

இது 7 11 15 19 … என்று இருக்கும்.

இத் தொடர் முறை ஒரு கூட்டுத் தொடர் முறையில் இருப்பதை அறிக.

எனவே,

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_2 - u_1\\
v_2 &= u_3 - u_2\\
\ldots &\quad \ldots \quad \ldots\\
v_{n-1} &= u_n - u_{n-1}\\
\hline
v_1+v_2+\ldots+v_{n-1} &= u_n - u_1
\end{aligned}$$

அதாவது,

$7+11+\ldots\ (n-1)$ உறுப்புகள் $= u_n - 4$.

$$\therefore\ u_n = 4 + \frac{n-1}{2}\,(14+\overline{n-2}\,.\,4)$$

$$= 4 + \frac{n-1}{2}\,(14+4n-8)$$

$$= 4 + (n-1)(2n+3)$$

$$= 2n^2 + n + 1$$

$$\therefore\ t_n \left\{\begin{matrix}\text{தொடரின்}\\ n \text{ ஆவது உறுப்பு}\end{matrix}\right\} = \frac{2n^2+n+1}{n!}$$

$2n^2+n+1 = An(n-1) + Bn + C$ என்று வைப்போம்.

$$= 2n(n-1) + 3n + 1$$

$$\therefore\ t_n = \frac{2n(n-1) + 3n + 1}{n!}$$

$$= \frac{2}{(n-2)!} + \frac{3}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$

$\therefore$ தொடரின் கூட்டுத் தொகை $= 2e + 3e + e - 1$

$$= 6e - 1.$$

5·9. மடங்கி வரும் தொடர்கள் :

இலக்கணம் : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ என்ற தொடரில் தொடர்ந்தாற்போல அடுத்தடுத்து வரும் $(r+1)$ கெழுக்கள்,

$a_n + p_1 . a_{n-1} + p_2 . a_{n-2} + \dots + p_r . a_{n-r} = 0$ என்ற ஒரு படித் தொடர்பை $n \geqslant r$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் பெற்றிருந்தால் அத் தொடரினை r வரிசை ஏற்ற மடங்கி வரும் தொடர் (recurring series of the rth order) எனக் கூறுவோம். மேலும் $1 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_r x^r$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையினை அளவுத் திட்டத் தொடர்பு (scale of relation) எனக் கூறுவோம்.

ஒரு r வரிசை ஏற்ற மடங்கி வரும் தொடரினை அத்தொடரின் முதல் $2r$ உறுப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் நிர்ணயிக்கலாம் :

$$\text{தொடரினை } a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2r-1} x^{2r-1} + \dots$$

என்று குறிப்போம். இது r வரிசை ஏற்ற மடங்கி வரும் தொடராய் இருத்தலால்,

$1 + p_1 x + \dots + p_r x^r$ என்பது இதன் அளவுச் சட்டமாகும். இத் தொடரின் ஒவ்வொரு $(r+1)$ அடுத்தடுத்த கெழுக்கள்

$$a_n + p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \dots + p_r a_{n-r} = 0 \; ; \; n \geqslant r$$

என்ற ஒருபடித் தொடரினை ஏற்கின்றன. எனவே,

$$\begin{array}{lllll} a_r & + p_1 a_{r-1} & + p_2 a_{r-2} & + \dots + p_r a_0 & = 0 \\ a_{r+1} & + p_1 a_r & + p_2 a_{r-1} & + \dots + p_r a_1 & = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2r-1} & + p_1 a_{2r-2} & + p_2 a_{2r-3} & + \dots + p_r a_{r-1} & = 0 \end{array}$$

மேற்காணும் r ஒருபடிச் சமன்பாடுகளில் $p_1, p_2, \dots, p_r$ ஆகிய வைகளின் தீர்வுகளைக் காணலாம். எனவே,

$a_n + p_1 a_{n-1} + \dots + p_r a_{n-r} = 0 \; ; \; n \geqslant 0$ என்ற ஒரு படித் தொடர்பு கிடைக்கின்றது. இத் தொடர்பினுல் $a_{2r}, \; a_{2r+1}, \dots$ ஆகியவைகளைக் காணலாம்.

5·10. மடங்கி வரும் தொடர்களின் தொகை காணல் :

எடுத்துக்காட்டாக நாம் 2 வரிசை ஏற்ற மடங்கி வரும் தொடரினை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ என்று அத்தொடரை எழுது வோம்.

இதன் அளவுத் திட்டத் தொடர்பு $1 + px + qx^2$ என்று இருக்கும்.

மேலும் $a_n + pa_{n-1} + qa_{n-2} = 0$; $n \geqslant 2$ என்று ஒவ்வொரு 3 அடுத்தடுத்து வரும் கெழுக்கள் அமைந்து இருக்கும்.

$$S = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \text{ என்க.}$$

$$\therefore \quad px\ S = a_0px + a_1px^2 + a_2px^3 + a_3px^4 + \dots$$

$$qx^2\ S = a_0qx^2 + a_1qx^3 + a_2qx^4 + a_3qx^5 + \dots$$

$$\therefore \quad (1 + px + qx^2)\ S = a_0 + (a_1 + a_0p)\ x + (a_2 + pa_1 + a_0q)x^2 + (a_3 + pa_2 + qa_1)x^3 + \dots$$

ஆனால்

$$a_n + pa_{n-1} + qa_{n-2} = 0\ ; \quad n \geqslant 2.$$

எனவே

$$(1 + px + qx^2)\ S = a_0 + (a_1 + pa_0)x.$$

$$\therefore \quad \boxed{S = \frac{a_0 + (a_1 + pa_0)x}{1 + px + qx^2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 20 :

$2 + 5x + 13x^2 + 35x^3 + \dots$ என்ற மடங்குத் தொடரின் பிறப்பிக்கும் சார்பையும் (Generating function), n கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகையையும் காண்க. (செ.ப.)

நான்கு உறுப்புகள் கொடுத்திருப்பதால், அதன் அளவுத் திட்டத் தொடர்பை $1 + px + qx^2$ என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$$(2 + 5x + 13x^2 + 35x^3 + \dots)(1 + px + qx^2)$$
$$= 2 + x(2p + 5) + x^2(13 + 5p + 2q) + x^3(35 + 13p + 5q) + \dots$$

$$\therefore \quad 13 + 5p + 2q = 0.$$

$35 + 13p + 5q = 0$. இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்து $p = -5$, $q = +6$ எனக் கிடைக்கும்.

$\therefore$ அளவுத் திட்டத் தொடர்பு $= 1-5x+6x^2$.

$\therefore \quad 2+5x+13x^2+35x^3+\dots$

$$\dots = \frac{2+x(2p+5)}{1+px+qx^2}$$

$$= \frac{2-5x}{1-5x+6x^2}$$

$$= \frac{1}{1-2x}+\frac{1}{1-3x}$$

$$= (1-2x)^{-1}+(1-3x)^{-1}$$

$\therefore \quad 2+5x+13x^2+35x^3+\dots$

$$= [1+(2x)+(2x)^2+\dots+(2x)^n+\dots] + [1+(3x)+(3x)^2+\dots+(3x)^n+\dots]$$

$\therefore$ n ஆவது உறுப்பு $= (2^{n-1}+3^{n-1})\,x^{n-1}$

$\therefore \quad t_n = (2^{n-1}+3^{n-1})\,x^{n-1}$ ஆகும்.

முதல் n கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகை $\Big\} = \sum_{1}^{n} t_n = \sum_{n=1}^{n}(2^{n-1}+3^{n-1})$

$$= \sum_{1}^{n} 2^{n-1} + \sum_{1}^{n} 3^{n-1}$$

$$= \frac{2^n-1}{2-1}+\frac{3^n-1}{3-1}$$

$$= 2^n-1+3^{n-1}-\frac{1}{2}$$

$$= 2^n+3^{n-1}-\frac{3}{2}$$

பிறப்பிக்கும் சார்பு $= \dfrac{2-5x}{1-5x+6x^2}$.

எடுத்துக்காட்டு 21 :

$1+6x+24x^2+84x^3+\dots\dots$ என்ற மடங்குத் தொடரின் பிறப்பிக்கும் சார்பையும், n ஆவது உறுப்பையும், முதல் n கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகையையும் காண்க. (செ.ப.)

நான்கு உறுப்புகள் கொடுத்திருப்பதால் அதன் அளவுத் திட்டத் தொடர்பை $1 + px + qx^2$ என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$$\therefore\ (1+6x+24x^2+84x^3+\dots)(1+px+qx^2)$$
$$= 1+x(p+6)+x^2(q+6p+24)+x^3(6q+24p+84) + \dots\dots$$

$$\therefore\ 24 + 6p + q = 0.$$
$$84 + 24p + 6q = 0.$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளைத் தீர்வு கண்டால் $p = -5,\ q = 6$ எனக் கிடைக்கும்.

$\therefore$ அளவுத் திட்டத் தொடர்பு $= 1 - 5x + 6x^2$.

பிறப்பிக்கும் சார்பு $= \dfrac{1 + x(p+6)}{1 + px + qx^2}$

$= \dfrac{1 + x}{1 - 5x + 6x^2}$ ஆகும்.

$$\therefore\ (1 + 6x + 24x^2 + 84x^3 + \dots) =$$
$$= \frac{1+x}{1-5x+6x^2}$$
$$= \frac{4}{1-3x} - \frac{3}{1-2x}$$
$$= 4(1-3x)^{-1} - 3(1-2x)^{-1}$$
$$= 4[1 + (3x) + (3x)^2 + \dots + (3x)^n - \dots]$$
$$-3[1+(2x)+(2x)^2+\dots+(2x)^n+\dots]$$

$\therefore$ n ஆவது உறுப்பு $t_n = 4.3^{n-1}.x^{n-1} - 3.2^{n-1}.x^{n-1}$

S_n = முதல் n கெழுக்களின் கூடுதல் $\Big\} = 4\sum_{1}^{n} 3^{n-1} - 3\sum_{1}^{n} 2^{n-1}$

$$= 4.\frac{3^n - 1}{3-1} - 3.\frac{2^n - 1}{2-1}$$
$$= 2.3^n - 2 - 3.2^n + 3$$
$$= 2.3^n - 3.2^n + 1.$$

எடுத்துக்காட்டு 22 :

$4 + x + 7x^2 - 5x^3 + \ldots$ என்ற மடங்குத் தொடரின் பிறப்பிக்கும் சார்பையும், n ஆவது உறுப்பையும், முதல் n கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகையையும் காண்க. (செ. ப.)

நான்கு உறுப்புகள் கொடுத்திருப்பதால் அதன் அளவுத் திட்டத் தொடர்பு $1 + px + qx^2$ என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$$(4 + x + 7x^2 - 5x^3 + \ldots)(1 + px + qx^2)$$
$$= 4 + x(1 + 4p) + x^2(7 + p + 4q) + x^3(-5 + 7p + q) + \ldots$$

$$\therefore \quad 7 + p + 4q = 0$$
$$-5 + 7p + q = 0$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளைத் தீர்வு கண்டால்,

$$q = -2, \quad p = 1$$

எனக் கிடைக்கும்.

$\therefore$ அளவுத் திட்டத் தொடர்பு $= 1 + x - 2x^2$.

பிறப்பிக்கும் சார்பு $= \dfrac{4 + x(1 + 4p)}{1 + px + qx^2}$

$= \dfrac{4 + 5x}{1 + x - 2x^2}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad (4 + x + 7x^2 - 5x^3 \ldots)$$
$$= \frac{4+5x}{1+x-2x^2}$$
$$= \frac{4+5x}{(1-x)(1+2x)}$$
$$= \frac{1}{1+2x} + \frac{3}{1-x}$$
$$= (1+2x)^{-1} + 3(1-x)^{-1}$$
$$= [1 - 2x + (2x)^2 + \ldots (-2x)^n + \ldots] + 3[1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots]$$

n ஆவது உறுப்பு $t_n = (-2)^{n-1} x^{n-1} + 3 \cdot x^{n-1}$.

$$S_n = \text{முதல் } n \text{ கெழுக்களின் கூடுதல்} = \sum_{1}^{n} (-2)^{n-1} + \sum 3$$

$$= \frac{1-(-2)^n}{1+2} + 3^n$$

$$= \frac{1-(-2)^n}{3} + 3^n$$

பயிற்சி 5 (b)

I. பின்வரும் தொடர்களின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

1. $8 + 26 + 54 + 92 + 140 + \ldots$
2. $3 + 5 + 9 + 17 + 33 + \ldots$
3. $8 + 11 + 16 + 25 + 42 + \ldots$
4. $10 + 23 + 60 + 169 + 494 + \ldots$
5. $6 + 3 + 2 + 3 + 6 + 11 + \ldots$
6. $4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 + 120 + \ldots$
7. $1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 + \ldots$
8. $7 + 10 + 14 + 20 + 30 + 48 + 82 + \ldots$
9. $2 + 5 + 12 + 31 + 86 + 249 + \ldots$

II. பின்வரும் மடங்குத் தொடரின் பிறப்பிக்கும் சார்பையும் n ஆவது உறுப்பையும் காண்க :

1. $3 + 4x + 10x^2 + 18x^3 + \ldots$
2. $1 + 5x + 9x^2 + 13x^3 + \ldots$
3. $2 + 3x + 5x^2 + 9x^3 + \ldots$
4. $3 + 6x + 14x^2 + 36x^3 + 98x^4 + 276x^5 + \ldots$
5. $6 + 5x + 23x^2 - x^3 + 131x^4 - 145x^5 + \ldots$

III. $6x + 30x^2 + 138x^3 + 606x^4 + \ldots$ என்ற மடங்குத் தொடர்க் கெழுக்களின் n ஆவது உறுப்பையும் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையையும் காண்க.

விடைகள்

பயிற்சி 1

1. $\frac{9}{x-2} - \frac{7}{x-1}$

2. $\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+2}$

3. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

4. $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} - \frac{5}{x-3}$

5. $\frac{1}{9(x-1)} + \frac{9}{14(2x+1)} - \frac{8}{9(x+2)}$

6. $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{x+1} - 6 \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{25}{8} \cdot \frac{1}{x+3}$

7. $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{7}{x-2} + \frac{13}{2} \cdot \frac{1}{x-3}$

8. $\frac{1}{6} - \frac{1}{2(1+2x)} + \frac{1}{3(1+3x)}$

9. $\frac{23}{4} \cdot \frac{1}{(x-3)} - \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$

10. $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(1+x)} + \frac{1}{8(1-x)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x)^3}$

11. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(x+2)}$

12. $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{3}{4(1+x)} + \frac{4}{5(1-3x)}$

13. $\frac{1}{1-2x} + \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}$

14. $\frac{-6}{1-2x} - \frac{2}{(1-2x)^2} + \frac{9}{(1-3x)}$

15. $\frac{-2}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{3}{(x-2)}$

16. $\frac{-2}{1-x}+\frac{3}{(1-x)^2}-\frac{4}{(1-x)^3}-\frac{2}{(1-x)^4}$

17. $-\frac{15}{16}+\frac{47}{16}\cdot\frac{1}{(4x-1)}+\frac{185}{16}\cdot\frac{1}{(4x-1)^2}$
$\div\frac{25}{16}\cdot\frac{1}{(4x-1)^3}$

18. $\frac{1}{2(1-x)}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{x-1}{2(1+x^2)}$

19. $\frac{1}{100(x-3)}-\frac{x+3}{100(x^2+1)}-\frac{x+3}{10(x^2+1)^2}$

20. $\frac{2}{3(x-1)}-\frac{3x-1}{2(x^2+1)}$

21. $\frac{4}{3(x+1)}+\frac{11x-12}{3(x^2-2x+6)}$

22. $\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-3}{x^2+1}$

23. $\frac{2}{3(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$

24. $\frac{x-2}{x^2+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{3}{(x+2)^3}$

25. $\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{9}\cdot\frac{3x}{(x^2-x+1)^2}$

26. $-1+\frac{2}{3}\left[\frac{x-1}{2-x^2}+\frac{x-2}{4+x^2}\right]$

27. $a=1,\ b=-10,\ c=25$

28. $\frac{4}{1-2x}-\frac{2}{1-x}-\frac{1}{(1-x)^2}$

29. $A=3,\ B=1,\ C=1$

30. $A=0,\ B=3,\ C=-11$

31. $a=0,\ b=0,\ c=1,\ d=2.$

பயிற்சி 2 (a)

(2) 7ஆவது உறுப்பு. (3) 15ஆவது உறுப்பு. (4) 11 ஆவது உறுப்பு. (5) 11ஆவது உறுப்பு. (7) 8, 9ஆவது உறுப்புகள். (8) 5ஆவது உறுப்பு. (9) $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ (10) $4\sqrt[3]{2}-2$, (11) $2\sqrt{2}-1$

(12) $\frac{11}{6}$ (13) $\frac{1}{24}$ (14) $2\sqrt{2}$ (15) $2^{\frac{1}{3}}-1$ (16) $\sqrt{3}-1$

(17) $\frac{1}{2}\,(18)^{\frac{1}{3}}$ (18) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ (19) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

(20) $3\sqrt{3}-2$ (21) $\sqrt{3}-\frac{2}{3}$ (22) $\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)$

(23) $\frac{1}{2}\left(4^{\frac{1}{3}}-1\right)$ (24) $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

பயிற்சி 2 (b)

1. $(-1)^n\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$ 2. $\left(\frac{3^{n+2}-2^{n+3}+1}{2}\right)$

3. $2^n+n;\quad |x|<\frac{1}{2}$.

4. $(-1)^n\frac{1}{4}\left[6n-7+\frac{3}{2^{n+2}}-\frac{11}{3^{n+1}}\right]$

5. $(-1)^{n+1}+\frac{[(-1)^n-1]}{2^{n+2}};\quad |x|<1$

6. $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{7}{5^{n+1}}\right);\quad |x|<2$.

7. $(-1)^n\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$

8. $\frac{1}{27}\left[-18n^2-57n-40+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

9. $a=b=\frac{4}{5};\quad \frac{n+1}{5}\left[4+\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right]$

10. $a=\pm 1\quad b=\pm\frac{1}{2}$.

பயிற்சி 2 (c)

2. $\frac{n}{6}(n+1)(n+2)$.

பயிற்சி 3

1. $(x+1)e^x$
2. $(x^2+4x+2)e^x$
3. $(x^2+7x+8)e^x$
4. $2[x^2-3x+3]e^x + [x^2-6] \div 2x^2$
5. $(x^3+6x^2+7x+1)e^x$
6. $\sqrt{x}(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}) \div 2$
7. $(2x^2-7x+3)e^{-x}$
8. $(x+4x+2)e^x$
9. $(x+1)^2e^x-1$
10. $(x^2+2x)e^x$
11. $2e-1$
12. $e+1$
13. $\frac{2}{e}$
14. $e+2$.
15. $5e-2$
16. $e-2$
17. $7e-18$
18. $2\sqrt{e}$.
19. $-\frac{1}{e}$
20. $5e$
21. $\frac{3e}{2}$
22. $2e-\frac{7}{2}$
23. $9e-4$
24. $\frac{1}{2}e(e^2-1)$
25. $\frac{3e}{2}-\frac{1}{e}$
26. $2e-1$.
27. $2-\frac{5}{4e}$
28. $\frac{1}{8}\left(e^4-\frac{1}{e^4}\right)$
29. 4
30. $12e-1$.
31. $4e-2$
32. $\left(e-\frac{3}{e}\right)^8$
33. $e-\frac{5}{2}$
34. $\frac{17e}{6}$
35. $-\frac{1}{e}$
36. $6e+2$

37. $e+2$ 38. $\dfrac{e^a-e}{a-1}$

39. (a) $\dfrac{(1-n)e}{|\underline{n}}$ (b) $2^{n-2}\,\dfrac{(3n^2+n+4)}{|\underline{n}}$.

(c) $(-1)^n\,\dfrac{(1+n-3n^2)}{|\underline{n}}$

(d) $(-1)^n\,\dfrac{2^{n-1}\,(4-3n)}{|\underline{n}}$

(e) $e^a\,.\,\dfrac{b^n}{|\underline{n}}$

(f) $(-1)^n\,\dfrac{3^{n-1}\,(9-2n)}{|\underline{n}}$

40. $\dfrac{6\,(n-1)}{|\underline{n}}$

பயிற்சி 4 (b)

1. $\dfrac{5}{2}-3\log 2$ 2. $\dfrac{3}{4}-\log 2$

3. $2\log 2-1$ 4. $2\log 2-\dfrac{5}{4}$.

5. $3\log_e 2-1$ 6. $\dfrac{1}{3}\log 2-\dfrac{1}{12}$

7. $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}\right)\log(1-x)-\dfrac{1}{6}-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}$.

8. $-243\,.\,\log\dfrac{9}{10}-25$.

9. $2-\log_e 3$ 10. $9\log 2-12\log 2$

11. $\dfrac{1}{4}\left[\,2+\dfrac{x^2-1}{x}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right]$

12. $\dfrac{x}{1-x}+\log(1-x)$.

பயிற்சி 5 (a)

I. 1. $\frac{n}{3n+1}$; $\frac{1}{3}$

2. $1 - \frac{1}{|\underline{n+1}}$; 1

3. $1 - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{3^n}$; 1

4. $\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$; $\frac{1}{2}$

5. $|\underline{n+1} - 1$

6. $\frac{n}{(1+x)(1+\overline{n+1}\,x)}$

7. $\frac{n}{x(x+na)}$

8. $\frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n+1)}\right]$; $\frac{1}{2}$

9. $1 - \frac{x^n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$

II. 1. $n(16n^4 + 120n^3 + 280n^2 + 180n - 71)/5$

2. $n(n+1)(n+2)(12n^2+99n+209)/60$

3. $\frac{1}{5}\, n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

4. $\frac{1}{12}[(3n+1)(3n+4)(3n+7)(3n+10) - 1.4.7.10]$

5. $\frac{1}{2}\, n(n+1)^2(n+2)$

6. $\frac{(4n-1)(4n+3)(4n+7)(4n+11)+3.7.11}{16}$

7. $\frac{1}{12}\, n(n+1)(n+2)(3n+5)$

8. $n(n+1)(n+2) - \frac{3}{4}\, n(n+1)(n+2)(n+3) + \frac{1}{9}\, n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

9. $\frac{3}{2}\, n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3) - \frac{1}{3}\, n\,(n+1)\,(n+2)$
$-8\, n\,(n+1) - 6n$

III. 1. $\frac{1}{4} - \frac{1}{2\,(n+1)\,(n+2)}$; $\frac{1}{4}$

2. $\frac{5}{6} - \frac{3n+5}{(n+2)\,(n+3)}$; $\frac{5}{6}$.

3. $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\,\frac{2n+3}{(n+1)\,(n+2)}$; $\frac{3}{4}$

4. $\frac{11}{180} - \frac{1}{12}\,\frac{6n+11}{(2x+1)\,(2n+3)\,(2n+5)}$; $\frac{11}{180}$

5. $\frac{11}{18} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3n^2+12n+11}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$; $\frac{11}{18}$.

6. $\frac{53}{72} - \frac{1}{6}\,\frac{18n^2+93n+106}{(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}$; $\frac{53}{72}$

7. $\frac{19}{36}$ 8. $\frac{359}{360}$

9. $\frac{1}{24} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(3n+1)\,(3n+4)}$; $\frac{1}{24}$

10 $\frac{49}{144} - \frac{1}{2\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}$
$+\, 3\,\frac{1}{(n+2)\,(n+3)\,(n+4)} - \frac{1}{2\,(n+2)\,(n+3)}$
$-\frac{1}{n+4}$; $\frac{49}{144}$

IV. 1. $\frac{(3.5.7\ldots 2n+1)}{2.4.6\ldots(2n)} - 1$

2. 11

3. 1

4. $\frac{4.7.10\ldots(3n+4)}{2.5.8\ldots(3n+2)} - 2$

5. $\dfrac{2.5.8 \ldots (3n+2)}{4.7.10 \ldots (3n+1)} - 2$

6. $\dfrac{1}{2}\left[1 - \dfrac{2.3.4. \ldots n(n+1)}{4.5.6 \ldots (n+2)(n+3)}\right]$

பயிற்சி 5 (b)

I. 1. $5n^2+3n;\quad n(n+1)(5n+7)/3.$

2. $2^n+1;\quad 2^{n+1}+n-2.$

3. $2^n+n+5;\quad 2^{n+1}+(n^2+11n-4)/2.$

4. $2.3^n+n+3;\quad 3^{n+1}+(n^2+7n-6)/2.$

5. $(n^2-6n+11);\quad \dfrac{n(2n^2-15n+49)}{6}$

6. $n^3-2n^2+3n+1;\quad \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \dfrac{3n(n+1)}{2} + n$

7. $\dfrac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3);$

$\dfrac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

8. $2^{n-1}+6+2(n-1);\quad 2^{n-1}+(n^2+5n-1)$

9. $3^{n-1}+n;\quad \dfrac{1}{2}[3^n+n^2+n-1].$

II. 1. $\dfrac{3+x}{1-x-2x^2};\quad \dfrac{1}{3}\{2(-1)^{n-1}+7.2^{n-1}\}\,x^{n-1}$

2. $\dfrac{1+3x}{(1-x)^2};\quad (4n+1)x^n.$

3. $\dfrac{2-3x}{1-3x+2x^2};\quad (1+2^n)x^n.$

4. $\dfrac{11x^2-12x+3}{1-6x+11x^2-6x^3}$; $(1+2^n+3^n)x^n$.

5. $\dfrac{6+5x-19x^2}{(1-x)(1-2x)(1+3x)}$; $2+3.2^{n-1}+(-3)^{n-1}$.

III. $6\,[2^{2n-1}-3^{n-1}]x^n$; $12x\left[\dfrac{(4x)^n-1}{4x-1}\right]$

$-6x\left[\dfrac{(3x)^n-1}{3x-1}\right]$

இரண்டாம் பாகம்

1. அணிக்கோவை

1·1. ஒருபடிச் சமன்பாடுகளைப் பொறுத்தவரை 'அணிக் கோவை'யைப் பயன்படுத்துகிறோம். $a_1x+b_1=0$, $a_2x+b_2=0$ என்ற இரு சமன்பாடுகளுக்கும் ஒரே தீர்வு இருக்குமெனில்,

$a_1b_2-a_2b_1=0$. இச்சமன்பாட்டின் இடப் புறமுள்ள

கோவையை $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ அல்லது $(a_1\ b_2)$ எனக் குறிக்கிறோம்.

இது இரண்டாம் நிலை அணிக்கோவை எனப்படும்.

அடுத்து,

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0$$
$$a_3x+b_3y+c_3=0$$

என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம். முதல் இரு சமன்பாடுகளிலிருந்து குறுக்குப் பெருக்கல் விதியின்படி

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

எனக் கிடைக்கிறது. x, y—ன் இம்மதிப்புகளைச் சமன்பாடு (3)-ல் பிரதியிட, $\Sigma a_3(b_1c_2-b_2c_1)=0$. இச்சமன்பாட்டில் இடப் புறத்திலுள்ள கோவை மூன்றும் நிலை அணிக்கோவை எனப்படும். இதை,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$ என எழுதுகிறோம்.

இதன் இடப் புறமுள்ள அணிக்கோவையை விரித்தெழுதினுல் கிடைப்பது,

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3$$

இக்கோவையைக் கவனித்தால் கீழ்க்கண்ட உண்மைகள் தெரிய வரும்.

(i) a, b, c என்ற எழுத்துகளை இவ்வரிசையில் எழுதி, 1, 2, 3 ஆகியவற்றை எல்லா வகையிலும் வரிசைப்படுத்தி அடிக் குறிகளாக எழுதினுல் அணிக்கோவையின் எல்லா உறுப்புகளும் கிடைக்கும்.

(ii) அடிக் குறிகளின் வரிசையைப் பொறுத்து உறுப்புகளின் குறி அமையும். 1, 2, 3 என வருவதை இயற்கை வரிசையெனக் கொண்டு, $a_1b_2c_3$ நேர்க் குறி உடையது எனக் கொள்வோம். ஓர் உறுப்பில் அடிக் குறிகளை இயற்கை வரிசைக்குக் கொண்டு வருவதற்குத் தேவையான மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படையாக இருந்தால் அவ்வாறு அமையும் உறுப்பு நேர்க் குறி உடையது எனவும், ஒற்றைப் படையாக இருந்தால் அது எதிர்க் குறி உடையது எனவும் தெரியப் பெறுகிறேம். இதையே பொதுவான விதியாகவும் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

என்ற அணிக்கோவையின் விரிவில் $a_2\, b_3\, c_1\, d_4$, $a_3\, b_1\, c_2\, d_4$, $a_4\, b_3\, c_1\, d_2$, $a_1\, b_4\, c_2\, d_3$ ஆகியவற்றின் குறிகள் என்ன?

$a_2\, b_3\, c_1\, d_4$-ல் அடிக் குறிகளின் வரிசை 2, 3, 1, 4. இதை 2, 1, 3, 4; 1, 2, 3, 4 என்ற இரு மாற்றங்களில் 1, 2, 3, 4 என்ற இயற்கை வரிசைக்குக் கொண்டு வரலாம். எனவே $a_2b_3c_1d_4$-ன் குறி $+$ ஆகும்.

இதேபோன்று $a_3b_1c_2d_4$, $a_4b_3c_1d_2$, $a_1b_4c_2d_3$ ஆகியவற்றின் குறிகள் முறையே $+$, $-$, $+$ ஆகும்.

1·2. $a, b, c \ldots l$ என்ற n எழுத்துகளையும் 1, 2, ... n என்ற அடிக் குறிகளையும் வைத்து n நிரைகளும் n நிரல்களும் அமைந்த n ஆம் நிலை அணிக்கோவையை

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_r & b_r & c_r & \ldots & l_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & l_n \end{vmatrix}$$

என அமைக்கலாம். இதிலுள்ள $a_1, a_2 \ldots$ என்ற n^2 எண்கள் ஒவ்வொன்றும் அணிக்கோவையின் மூலகம் எனப்படும்.

$a, b, \ldots l$ ஆகியவற்றை இதே வரிசையில் அமைத்து 1, 2, ... n ஐ எல்லா வகைகளிலும் வரிசைப்படுத்தி $a, b, \ldots l$-க்கு அடிக் குறிகளாக அமைத்து, தகுந்த குறியை இடுவதன் மூலம் இவ்வணிக் கோவையின் உறுப்புகள் காணப் பெறுகின்றன.

1, 2, .. , n ஆகியவற்றை $n!$ வகைகளில் வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம். எனவே அணிக்கோவையின் விரிவில் $n!$ உறுப்புகள் இருக்கும். இங்கு 1, 2, 3, ..., n என்ற வரிசையை இயற்கை வரிசையாகக் கொள்வோம். எனவே $a_1 b_2 c_3 \ldots l_n$ ஐ நேர் மதிப்புடைய தாகக் கொள்கிறோம். ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பில் $a, b, \ldots, l$ என்ற எழுத்துகளின் அடிக் குறிகளை இயற்கை வரிசைக்குக் கொண்டு வருவதற்கு எத்தனை மாற்றங்கள் தேவையோ அதைப் பொறுத்து உறுப்பின் குறி தீர்மானிக்கப்படுகிறது. இம் மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படையாகவோ அல்லது ஒற்றைப் படையாகவோ இருப்பின் குறிப்பிட்ட உறுப்பின் குறி முறையே நேராகவோ, அல்லது எதிராகவோ கொள்ளப்படும்.

குறிப்பு :

1. $a_1, b_2, c_3 \ldots l_n$ ஆகியவற்றைக் கொண்ட மூலைவரை முதன்மை வரை (principal diagonal) எனவும், இவ்வெண்களைக் கொண்ட $a_1 b_2 c_3 \ldots l_n$ என்ற உறுப்பு முதன்மை உறுப்பு (leading term) எனவும் கூறப்படும்.

2. மேலும் அணிக்கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் நிரல், நிரை வரிசை ஆகியவை ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் ஒரே ஒரு மூலகத்தைத்தான் உடையது என்பதும் குறிப்பிடத் தக்கது. அதாவது ஓர் உறுப்பில் b_5 என்ற எழுத்து இருப்பின் அவ்வுறுப்பில் b என்ற எழுத்து மற்றொரு முறை இராது. மேலும் 5 என்ற அடிக் குறியைக் கொண்டு வேறெந்த காரணியும் இராது.

3. அணிக்கோவையின் உறுப்புகளை அமைப்பதற்கு $a, b, \ldots, l$ என்ற எழுத்துகளை இதே வரிசையில் நிலையாக வைத்து அடிக் குறிகளை வரிசை மாற்றம் செய்வதற்குப் பதிலாக 1, 2, .., n என்ற அடிக் குறிகளை நிலையாக வைத்து $a, b, \ldots, l$ என்ற எழுத்துகளை வரிசை மாற்றங்கள் செய்தாலும் மேற்குறித்த அணிக்கோவையின் உறுப்புகள் கிடைக்கும். இங்கு $a, b, c, \ldots, l$ என்ற எழுத்துகளின் வரிசையை இயற்கையாகக் கொண்டு முன்போலவே உறுப்புகளின் குறியைத் தீர்மானிக்கிறோம்.

1·3. தேற்றம் 1:

நிரல்களை நிரைகளாகவும், நிரைகளை நிரல்களாகவும் மாற்றியமைத்தால் அணிக்கோவையின் மதிப்பு மாறாது.

தெரிப்பு :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & k_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & k_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & & k_n \end{vmatrix} \text{ எனவும்,}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ & & & \\ k_1 & k_2 & & k_n \end{vmatrix} \text{ எனவும் கொள்க.}$$

Δ, Δ' இவற்றின் முதன்மை உறுப்புகள் ஒன்றே. அதாவது $a_1\ b_2 \ldots k_n$. Δ —ன் மற்ற உறுப்புகள் முதன்மை உறுப்பின் எழுத்துகளை இயற்கை வரிசையில் வைத்து அடிக் குறிகளை எல்லா வகைகளிலும் வரிசை மாற்றம் செய்து தகுந்த குறியிடுவதன் மூலம் கிடைக்கும்.

Δ'-ன் மற்ற உறுப்புகள் முதன்மை உறுப்பின் அடிக் குறிகளை இயற்கை வரிசையில் வைத்து எழுத்துகளை எல்லா வகைகளிலும் வரிசை மாற்றம் செய்து தகுந்த குறியிடுவதன் மூலம் கிடைக்கும். ஆனால் இவ்விரு வழிகளிலும் கிடைக்கும் ஒத்த உறுப்புகள் ஒன்றுக்கொன்று முற்றிலும் சமமாயிருக்கும். எனவே

$$\Delta = \Delta'$$

1·4 தேற்றம் 2 :

ஓர் அணிக் கோவையின் ஓர் உறுப்பின் இரு அடிக் குறிகளை மாற்றுவதால் அணிக்கோவையின் மற்றோர் உறுப்பு கிடைக்கும். இவ்விரு உறுப்புகளும் எதிரெதிர்க் குறியுடையன.

தெரிப்பு :

$(a_1\ b_2 \ldots k_n)$ என்ற அணிக்கோணியில் $(a_1\ b_2 \ldots c_r\ d_s \ldots k_n)$ என்ற உறுப்பின் r, s என்ற அடிக் குறிகளை மாற்றினால் கிடைப்பது $a_1\ b_2 \ldots c_s\ d_r \ldots k_n$. இந்த உறுப்பில் கொடுத்துள்ள அணிக் கோவையின் ஒவ்வொரு நிரலிலிருந்தும் ஒரே ஒரு எழுத்தும் ஒவ்வொரு நிரையிலிருந்தும் ஒரே ஒரு எழுத்தும் தான் அமைந்துள்ளன. மேலும் இதிலுள்ள எழுத்துகள் கொடுத்துள்ள அணிக் கோவையின் மூலகங்களாகும். நாம் எடுத்துக் கொண்ட உறுப்பில் அடிக் குறிகளை இயற்கை வரிசைக்குக் கொண்டு வருவதற்கு வேண்டிய மாற்றங்கள் x என இருந்தால் $(x+1)$ மாற்றங்களில் $a_1\ b_2 \ldots c_r\ d_s \ldots k_n)$ ஐ இயற்கை வரிசைக்குக் கொண்டு வரலாம். ஏனெனில் இவ்விரு உறுப்புகளையும் 2 அடிக் குறிகளை ஒன்றை ஒன்று மாற்றுவதன் மூலம் பெறுகிறோம். x இரட்டைப் படை எண் எனில் $(x+1)$ ஒற்றைப் படை எண். எனவே, இரு உறுப்புகளும் வெவ்வேறு குறியைக் கொண்டிருக்கும்.

1·5. தேற்றம் 3 :

ஓர் அணிக்கோவையின் இரு நிரைகளையோ அல்லது இரு நிரல்களையோ ஒன்றையொன்று மாற்றியமைப்பதால் கொடுத்துள்ள அணிக்கோவை குறியில் மாறும்; எண் மதிப்பு மாறாது.

தெரிப்பு :

ஏனெனில் இரு நிரல்களை ஒன்றையொன்று மாற்றியமைப்பது இரு அடிக் குறிகளை ஒன்றையொன்று மாற்றியமைப்பதற்குச் சமமாகும். இதேபோன்று இரு நிரைகளை ஒன்றையொன்று மாற்றி அமைப்பது இரு எழுத்துகளை ஒன்றையொன்று மாற்றியமைப்பதற்குச் சமமாகும். எனவே இரு நிலைகளிலும் அணிக்

கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் மாற்றுக் குறியைப் பெறும். உறுப்புகளின் எண் மதிப்பு மாறாது எனவே, அணிக்கோவையே மாற்றுக் குறியைப் பெறும். இதன் எண் மதிப்பு மாறாது.

1·6 தேற்றம் 4 :

இரு நிரைகளேயோ, இரு நிரல்களேயோ முற்றிலும் சமமாகக் கொண்ட ஓர் அணிக்கோவையின் மதிப்பு **பூச்சியமாகும்.** கொடுத்துள்ள அணிக்கோவை $\triangle$-ல் குறிப்பிட்ட இரு நிரைகளே ஒன்றோடொன்று மாற்றியமைப்பதால் அணிக்கோவையின் மதிப்பு எண்ணளவிலும் குறியிலும் மாறாது. ஆனல், மேற்குறித்த தேற்றத்தின்படி எந்த இரு நிரைகளை ஒன்றோடொன்று மாற்றியமைத்தாலும் அணிக்கோவையின் மதிப்பு குறியளவில் மாறும்.

எனவே,

$$\triangle = -\triangle \qquad \therefore \quad \triangle = 0.$$

கிளைத்தேற்றம் 1 :

$\triangle$ என்ற அணிக்கோவையின் மூலகங்கள் x-ன் அளவுக் கிணங்கிய முழுச் சார்புகள் எனில் $x = a$ எனப் பிரதியிடுகையில் இரு நிரல்கள் அல்லது இரு நிரைகள் முற்றும் சமமாளுல் $(x-a)$, $\triangle$-ன் ஒரு காரணியாகும்.

ஏனெனில் $\triangle$-ன் விரிவு x-ல் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். $x = a$ எனப் பிரதியிடுவதால் $\triangle = 0$ ஆவதால் மீதித்தேற்றத்தின்படி $(x-a)$, $\triangle$-ன் ஒரு காரணியாகும்.

கிளைத்தேற்றம் 2 :

$\triangle$-ல் $x=a$ எனப் பிரதியிடுவதன் மூலம் r நிரல்கள் (நிரைகள்) முற்றும் சமமெனில் $(x-a)^{r-1}$, $\triangle$-ன் ஒரு காரணியாகும்.

1·7. தேற்றம் 5 :

ஓர் அணிக்கோவையின் ஒரு குறிப்பிட்ட நிரல் அல்லது நிரையின் ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் k என்ற எண்ணுல் பெருக்கினுல் அணிக்கோவையின் மதிப்பு k மடங்காகும்.

தெரிப்பு :

ஏனெனில் அணிக்கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் ஒவ்வொரு நிரலிலிருந்தும் ஒவ்வொரு நிரையிலிருந்தும் ஒரே ஒரு மூலகம் தான் இருக்கும். எனவே ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் k ஒரு காரணியாக இருக்கும்.

$$\therefore \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

மறுதலையாக, ஏதேனும் ஒரு நிரல் அல்லது நிரையின் எல்லா மூலகங்களும் k எனும் பொதுக் காரணி கொண்டிருந்தால், k அணிக்கோவையின் ஒரு காரணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$ -ன் மதிப்புக் காண்க.

Δ-ல், $a = b$ எனப் பிரதியிடுகையில் இரண்டு நிரைகள் சமமாவதால் $\Delta = 0$. $\therefore$ $(a-b)$ ஆனது Δ-ன் ஒரு காரணியாகும். இதே போன்று $(b-c)$, $(c-a)$ ஆகியவையும் Δ-ன் காரணிகளாகும். Δ ஐ விரித்தெழுதினால் அது a, b, c-யிலமைந்த மூன்றும் படிக் கோவையாகும்.

எனவே $\Delta = k(a-b)(b-c)(c-a)$ ... (k நிலையெண்.)

Δ-ன் முதன்மை உறுப்பு a^2b

வலப் பக்கத்தில் a^2b-ன் கெழு $= -k$.

$$\therefore \ k = -1.$$

$$\therefore \ \Delta = -(a-b)(b-c)(c-a)$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$$ -ன் மதிப்புக் காண்க.

Δ-ல் $x=y$ எனப் பிரதியிட்டால் இரு நிரல்கள் சமமாவதால், $(x-y)$ ஆனது Δ-ன் ஒரு காரணியாகும். இதேபோன்று $(y-z)$, $(z-x)$ ஆகியவையும் Δ-ன் காரணிகளாகும். Δ-ன் விரிவு x, y, z-ல் அமைந்த 5 ஆம் படிக் கோவையாகும்.

$$\therefore \quad \Delta = [\, l\,(x^2+y^2+z^2) + k\,(xy+yz+zx)\,]\,(x-y)\,(y-z)\,(z-x)$$

l, k ஆகியவை, x, y, z சார்பற்ற நிலை எண்கள்.

அணிக்கோவையின் உறுப்பில் x^3 தான் x-ல் அமைந்த மிக உயர்ந்த படி கொண்ட உறுப்பு. x^4 உறுப்பு இல்லை.

ஆனல் வலப் பக்கத்தில் x^4 உறுப்பு $- lx^4\,(y-z)$

$\therefore \quad l = 0$. முதன்மை உறுப்பு y^2z^3

$\therefore \quad 1 = -k$

$\therefore \quad k = -1$

$\therefore \quad \Delta = -(xy+yz+zx)\,(x-y)\,(y-z)\,(z-x)$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc\,(a+b+c)^3$$

என நிறுவுக. (செ.ப.க.)

$$\Delta = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ b^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$ எனக் கொள்வோம்.

இதில் $a = 0$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$\Delta = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & 0 & 0 \\ b^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b+c)^2\,(b^2c^2 - b^2c^2) = 0,$$

$\therefore$ a, Δ-ன் ஒரு காரணியாகும். இதேபோன்றே b, c ஆகியவையும் Δ-ன் காரணிகளாகும்.

இப்போது $a = -(b+c)$ என Δ-ல் பிரதியிட்டால்

$$\Delta = \begin{vmatrix} (-a)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (-b)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (-c)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

இங்கு மூன்று நிரல்களும் முற்றிலும் சமமாயிருப்பதால் $\Delta = 0$.

$\therefore$ $(a+b+c)^2$, Δ-ன் மற்றொரு காரணியாகும்.

Δ ஆனது a,b,c அமைந்த ஒரு படித்தான, சமச்சீருடைய ஆறுவது படிக்கோவையாகும்.

எனவே $\Delta = N\, abc \quad (a+b+c)^2$ இங்கு N, a, b, c லமைந்த சமச்சீர் ஒருபடிக் கோவையாகும்.

$$\therefore \quad \Delta = k\ (a+b+c)\ abc\,(a+b+c)^2\ (k\text{-நிலையெண்})$$

Δ-ல் $a=1$, $b=1$, $c=1$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$27k = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4\,(16-1) - 1\,(4-1) + 1\,(1-4) = 54$$

$\therefore$ $k = 2$.

$$\therefore \quad \Delta = 2\,abc\,(a+b+c)^3$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

$= -(a-b)\,(b-c)\,(c-a)\,(ab+bc+ca)$ என நிறுவுக.

$$\Delta = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$ என இருக்கட்டும்.

$$\Delta = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

[முதல் நிரையின் மூலகங்களை 'a' ஆலும், 2ஆம் நிரையின் மூலகங்களை 'b' ஆலும், 3ஆம் நிரையின் மூலகங்களை 'c' ஆலும் பெருக்க]

$$= \frac{1}{abc}\cdot abc\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

[முதல் நிரலிலிருந்து abc என்னும் பொதுக்காரணி எடுக்க.]

$$= \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$= -(ab+bc+ca)\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)$ [எ.கா. (2)-ன் படி]

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$\begin{vmatrix} x^3-l^3 & (x-l)^2 & x-l \\ l^2+x^2+lx & l^3 & 1 \\ lx\,(l^2+x^2)+l^2x^2 & l^3x^3 & lx \end{vmatrix} = 0$$

எனக் காட்டுக.

கொடுத்துள்ள அணிக்கோவை

$$= (x-l)\,lx\begin{vmatrix} x^2+lx+l^2 & (x-l)^2 & 1 \\ l^2+x^2+lx & l^3 & 1 \\ l^2+x^2+lx & lx & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-l)\, lx\,(x^2+lx+l^2)\begin{vmatrix} 1 & (x-l)^2 & 1 \\ 1 & l^3 & 1 \\ 1 & lx & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-l)\, lx\,(x^2+lx+l^2) + 0$$

$$= 0$$

[∵ அணிக்கோவையின் இரு நிரல்கள் முற்றிலும் சமம்.]

பயிற்சி 1 (a)

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 \end{vmatrix}$$

$$= -(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)$$

என நிறுவுக.

2. $$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$$ எனக் காட்டுக.

3. $$\begin{vmatrix} x & l & m & 1 \\ \alpha & x & n & 1 \\ \alpha & \beta & x & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

என நிறுவுக.

4. $$\begin{vmatrix} a^2+ab+bc+ca & a^2-b^2 & (a+b)^2 \\ ab+bc & ab-b^2 & ab+b^2 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

என நிறுவுக.

என்ற அணிக்கோவையை எடுத்துக்கொள்வோம். இதன் விரிவில் ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் நிரல், நிரை, ஆகியவை ஒவ்வொன்றி லிருந்தும் ஒரே ஒரு மூலகம்தான் இருக்கும். எனவே இதன் விரிவை a_1ஐக் கொண்ட உறுப்புகள் $+ b_1$ஐக் கொண்ட உறுப்புகள் $+ \ldots\ldots + k_1$ஐக் கொண்ட உறுப்புகள் என, அதாவது

$$a_1A_1 + b_1B_1 + \ldots\ldots + k_1K_1$$ என எழுதலாம்.

A_1-ல் a_1 ஐக் கொண்ட நிரல், நிரை ஆகியவற்றிலிருந்து மூல கங்கள் இராது. இதே போன்றே $B_1 \ldots K_1$ ஆகியவை அமையும்.

A_1 ஐக் கண்டுபிடிக்க: a_1ஐக் கொண்ட எல்லா உறுப்பு களும் தலைமையுறுப்பான $a_1\, b_2\, c_3 \ldots k_n$-ல் a_1 ஐ நிலையாக வைத்து 2, 3...n என்ற மற்ற அடிக் குறிகளை மற்ற எழுத்துகளுக்கு எல்லா வகையிலும் வரிசை மாற்றம் செய்வதால் கிடைக்கும். இவ்வாறு வரிசை மாற்றத்தில் கிடைக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்பின் அடிக் குறிகளையும் இயற்கை வரிசைக்குக் கொண்டு வருவதற்குத் தேவையான மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்து அவ் வுறுப்பின் குறியைத் தீர்மானிக்கிறோம். எனவே a_1 காணப்படும் நிரல், நிரையை Δவிலிருந்து நீக்குவதன் மூலம் கிடைக்கும் $(b_2\, c_3 \ldots k_n)$க்கு A_1 சமமாகும். இதேபோன்று வேறு ஏதேனும் கெழு, உதாரணமாக C_5ஐக் கண்டுபிடிக்கக் கீழ்க்கண்ட முறையைப் பின்பற்றலாம். அடுத்தடுத்த நிரைகளை ஒன்றை யொன்று மாற்றி அமைப்பதன் மூலம் c_5 அமைந்த நிரையை முதல் நிரையாகக் கொண்டு வரலாம். அடுத்து இதே போன்று அடுத் தடுத்த நிரல்களை ஒன்றையொன்று மாற்றி அமைப்பதன் மூலம் c_5 அமைந்த நிரல் இடப் பக்கத்தில் முதல் நிரலாகக் கொண்டு வரலாம். இந்த நிலையில் c_5 அமைந்த நிரை, நிரல் நீங்கலாக மற்ற நிரல், நிரைகளிலுள்ள மூலகங்கள் கொடுத்துள்ள அணிக் கோவையைப் பொருத்த தத்தம் நிலை மாறாமல் இருக்கும்.

இப்போது அடுத்தடுத்த நிரல் அல்லது நிரைகள் ஒன்றை யொன்று மாற்றும் ஒவ்வொரு மாற்றத்திற்கும் அணிக்கோவையின் குறி மாறுபடும். c_5 ஐ 5ஆவது நிரையிலிருந்து முதல் நிரைக்கு 4 மாற்றங்களுக்குப் பின்னும், அதன் பின்னர் மூன்றுவது நிரலி லிருந்து முதல் நிரலுக்கு 2 மாற்றங்களுக்குப் பின்னும் கொண்டு வரலாம். எனவே புதிய நிலையில் c_5 இன் குணகத்தின் குறி $(-1)^{4+2}$ ஆகும். எனவே c_5 காணப்படும் நிரல், நிரை நீங்கலாக அமைந்த அணிக்கோவையை $(-1)^6$ ஆல் பெருக்கி வருவது C_5-ன் மதிப்பாகும்.

$(a_1 b_2 \ldots\ldots k_n)$ என்ற அணிக்கோவையில் a_1 என்ற மூலகம் அமைந்த நிரல், நிரை இவை நீங்கலாக அமைந்த அணிக் கோவையே a_1 இன் சிற்றணிக்கோவை (minor) A' எனப்படும். அணிக்கோவையின் விரிவில் g_r-ன் குணகம், g_r என்னும் மூலகத்தின் **இணைக் காரணி** (co-factor) எனப்படும். எனவே g_r-ன் சிற்றணிக்கோவைக்குத் தகுந்த குறியிட்டால் அது g_r-ன் இணைக் காரணி ஆகும். ஒரு குறிப்பிட்ட மூலகத்தை அணிக் கோவையின் இடப் பக்கம் முதல் நிரையில் முதல் மூலகமாகக் கொண்டுவர அடுத்தடுத்த நிரல், நிரை ஆகியவற்றின் எத்தனை மாற்றங்கள் தேவைப்படுகின்றனவோ அவற்றைப் பொறுத்து அதன் இணைக் காரணி தீர்மானிக்கப்படுகிறது. இம் மாற்றங்கள் இரட்டைப் படையாகவோ, ஒற்றைப் படையாகவோ இருப்பின் சிற்றணிக்கோவைக்கு முறையே $+$, $-$ குறியிடுவதன் மூலம் இணைக் காரணி பெறுகிறோம். சான்றாக rஆவது நிரல், s ஆவது நிரலில் அமைந்த உறுப்பின் (g_r) இணைக் காரணி $G_r = (-1)^{r+s} G'_r$. ஏனெனில், g_rஐ மேற்குறித்த நிலைக்குக் கொண்டு வருவதற்கு நிரல் நிரைகளில் அமைக்க வேண்டிய மாற்றங்கள் $= (r-1) + (s-1)$. எனவே a_r-ன் சிற்றணிக்கோவைக்குத் தகுந்த குறியிட்டால் அது a_r-ன் இணைக்காரணி என வரையறை செய்யலாம்.

இப்போது a_1ன் சிற்றணிக்கோவை, இணைக் காரணி ஆகியவை முற்றிலும் சமம். அதாவது $A_1' = A_1$. எனவே $\Delta = a_1 A_1' - b_1 B_1' + c_1 C_1' + \ldots\ldots + (-1)^{r-1} g_r G'_{r-1}$ என விரித்தெழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

குறிப்பு: $\Delta = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + a_n A_n$

$$= a_1 A_1 + b_1 B_1 + \ldots + l_1 L_1$$

$$= a_2 A_2 + b_2 B_2 + \ldots + l_2 L_2$$

என வெவ்வேறு வகைகளில் அணிக்கோவையை விரித்தெழுத லாம் என்பது இப்போது தெளிவாகிறது. இதிலிருந்து கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தைப் பெறுகிறோம்.

1·9. தேற்றம் 6 :

அணிக்கோவையின் ஒருநிரலின் (அல்லது நிரையின்) மூலகங் களை மற்றொரு நிரலின் (அல்லது நிரையின்) ஒத்த மூலகங்களின் இணைக் காரணிகளால் பெருக்கினால் இவற்றின் கூடுதல் பூச்சியம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$ -ன் மதிப்புக் காண்க.

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} h & g \\ f & c \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} h & g \\ b & f \end{vmatrix}$$

$$= a(bc-f^2) - h(ch-fg) + g(hf-bg)$$

$$= abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$ -ன் மதிப்புக் காண்க.

நான்காம் நிரலின் மூலகங்கள் மூலமாக விரித்தெழுதக் கிடைப்பது

$$1\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$ (ஏனெனில் இந்நிரலில் மற்ற மூலகங்கள் பூச்சியம்.)

இவ்வணிக்கோவையை இரண்டாம் நிரை மூலகங்கள் கொண்டு விரிவு படுத்தினல் கிடைப்பது

$$-3\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = -3(18-0) = -54.$$

∴ கொடுத்துள்ள அணிக்கோவையின் மதிப்பு $= -54.$

பயிற்சி 1 (b)

கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -2.$

2. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 38.$

3. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 102$

5. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 87$

6. $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix} = -8$

7. $$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$$

8. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = 1$$

9. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

10. $$\begin{vmatrix} x-a & a & a \\ a & x-a & a \\ a & a & x-a \end{vmatrix} = x(x-a)(x-2a)$$

11. $$\begin{vmatrix} (y-z)^2 & z^2 & y^2 \\ z^2 & (x-z)^2 & x^2 \\ y^2 & x^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2(xy-yz-zx)^2$$

12. $$\begin{vmatrix} b^2 & a^2 & (a+b)^2 \\ 1 & (a+1)^2 & a^2 \\ (b+1)^2 & 1 & b^2 \end{vmatrix} = -2(ab+a+b)^3$$

1·10. தேற்றம் 7 :

ஓர் அணிக்கோவையின் ஏதேனும் ஒரு நிரல் அல்லது நிரையின் ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் இரு இராசிகளின் கூடுதலாக எழுதினுல் அணிக்கோவையை இரு அணிக்கோவைகளின் கூடுதலாக எழுதலாம். ஏனெனில்,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1+\beta_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2+\beta_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3+\beta_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ எனில்

$\Delta \equiv a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3$ என எழுதலாம். இங்கு A_1, A_2, A_3 ஆகியவை முறையே a_1, a_2, a_3 சார்பற்றவை.

$$\begin{aligned} \therefore\ \Delta &= a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 \\ &= (\alpha_1+\beta_1)A_1 + (\alpha_2+\beta_2)A_2 + (\alpha_3+\beta_3)A^3 \\ &= (\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3) + (\beta_1A_1+\beta_2A_2+\beta_3A_3) \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & b_1 & c_1 \\ \beta_2 & b_2 & b_2 \\ \beta_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

1·11. தேற்றம் 8 :

ஓர் அணிக்கோவையின் ஏதேனும் ஒரு நிரல் அல்லது நிரையின் மூலகங்களுடன் மற்றொரு நிரல் அல்லது நிரையின் ஒத்த மூலகங்களின் k மடங்கைக் கூட்டினால் அணிக்கோவையின் மதிப்பு மாறாது.

ஏனெனில்,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta \text{ எனவும்,}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

எனவும் இருக்கட்டும். இங்கு k ஏதேனும் ஓர் எண்.

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0$$

$$= [\, a_1 \;\; b_2 \;\; c_3 \,]$$

$$\therefore \quad \Delta' = \Delta$$

குறிப்பு :

இதே அடிப்படையில்

$$\begin{vmatrix} l_1 a_1 + l_2 b_1 + l_3 c_1 & b_1 & c_1 \\ l_1 a_2 + l_2 b_2 + l_3 c_2 & b_2 & c_2 \\ l_1 a_3 + l_2 b_3 + l_3 c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = l_1\, [a_1\; b_2\; c_3]$$

குறிப்பு :

மேற்குறித்தபடி நிரல்கள், நிரைகளை மாற்றி அமைக்கும்போது குறைந்தது ஒரு நிரலை அல்லது நிரையை மாற்றம் செய்யாமல் விட்டு வைத்தல் வேண்டும். பின்வரும் கணக்குகளில் R_1, R_2, R_3 ...; C_1, C_2, C_3 ஆகியவை முறையே முதல், இரண்டாவது, மூன்ருவது நிரைகளையும், நிரல்களையும் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

a, b, c வெவ்வேறு மதிப்புடையவை எனவும்

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix} = 0$$

எனவும் இருந்தால் $abc = -1$ என நிறுவுக. [செ.ப.க.]

கொடுத்துள்ள அணிக்கோவையை Δ எனக் கொண்டால்,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + abc \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+abc) \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

a, b, c ஆகியவை வெவ்வேறு மதிப்புடையன ஆதலால்

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\therefore \quad abc + 1 = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ b & x+c & a \\ c & a & x+b \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(செ.ப.க.)}$$

கொடுத்துள்ளது x-ல் அமைந்த முப்படிச் சமன்பாடு ஆகும். அணிக்கோவையை Δ எனக் கொள்வோம்.

△-ன் 2ஆவது 3ஆவது நிரல்களின் மூலகங்களை முதல் நிரலுடன் கூட்டினால் கிடைப்பது

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c \\ x+a+b+c & x+c & a \\ x+a+b+c & a & x+b \end{vmatrix} = 0.$$

$$\therefore\ (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x+c & a \\ 1 & a & x+b \end{vmatrix} = 0$$

$[R_3-R_1,\ R_3-R_1]$

$$(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & x+c-b & a-c \\ 0 & a-b & x+b-c \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ (x+a+b+c)\,[x+c-b]\,(x+b-c)-(a-b)\,(a-c)\,]=0.$$

அதாவது $(x+a+b+c)\,[x^2-(c-b)^2-(a-b)\,(a-c)\,]=0$

$$(x+a+b+c)\,[x-(c^2+b^2-2bc+a^2-ac-ab+bc)]=0$$

$$(x+a+b+c)\,[x^2-(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)]=0$$

$\therefore\ x = -(a+b+c)$ அல்லது

$$\pm(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^{\frac{1}{2}}$$

$\therefore$ சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $-(a+b+c)$,

$$\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & x \\ 5 & 6 & 7 & y \\ 6 & 7 & 8 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = (x-2y+z)^2$$ என நிறுவுக.

(செ.ப.க.)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & x \\ 5 & 6 & 7 & y \\ 6 & 7 & 8 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}$$ என இருக்கட்டும்.

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x-2y+z \\ -1 & -1 & -1 & y-z \\ 6 & 7 & 8 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}$$

$[R_1-2R_2-R_3,\ R_2-R_3]$

$$= -(x-2y+z)\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 6 & 7 & 8 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= -(x-2y+z)\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \\ x-y & y-z & z \end{vmatrix} \quad [C_1-C_2,\ C_2-C_3]$$

$= (x-2y+z)[-(y-z)+x-y]$

$= (x-2y+z)(x-2y+z)$

$= (x-2y+z)^2$

$\therefore\ \Delta = (x-2y+z)^2$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$$ ஒரு சரியான வர்க்கம் எனக் காட்டு. (செ.ப.க.)

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$$ என இருக்கட்டும்.

$$\Delta = abc \begin{vmatrix} -a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \; [C_2+C_1,\ C_3+C_1]$$

$$= a^2b^2c^2\,[-1\,(-4)]$$

$$= 4a^2b^2c^2$$

$$= (2abc)^2.$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

தீர்வு காண்க :

$$\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3a-x & a-x & a-x \\ 3a-x & a+x & a-x \\ 3a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} \; [C_1+C_2+C_3]$$

$$= (3a-x)\begin{vmatrix} 1 & a-x & a-x \\ 1 & a+x & a-x \\ 1 & a-x & a+x \end{vmatrix}$$

$$= (3a-x)\begin{vmatrix} 1 & a-x & a-x \\ 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 2x \end{vmatrix} \quad [R_2-R_1,\ R_3-R_1]$$

$$= (3a-x)(4x^2-0)$$

$$\therefore\ (3a-x)\,4x^2 = 0$$

∴ சமன்பாட்டின் மூலங்கள் 0, 0, $3a$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$$\begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} = 0 \text{ எனக் காட்டு.}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} \text{ என இருக்கட்டும்.}$$

$$\Delta = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} ab^2c^2 & abc & ab+ac \\ bc^2a^2 & bca & bc+ba \\ ca^2b^2 & cab & ca+cb \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{abc}\cdot a^2b^2c^2\begin{vmatrix} bc & 1 & ab+ac \\ ca & 1 & bc+ba \\ ab & 1 & ca+cb \end{vmatrix}$$

$$= abc \cdot \begin{vmatrix} bc & 1 & ab+ac+bc \\ ca & 1 & bc+ba+ca \\ ab & 1 & ca+ab+cb \end{vmatrix} \quad [C_3+C_1]$$

$$= abc\,(ab+bc+ca) \begin{vmatrix} bc & 1 & 1 \\ ca & 1 & 1 \\ ab & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\,(ab+bc+ca) \times 0$$

[ஏனெனில் இரு நிரல்கள் முற்றிலும் சமம்.]

$$= 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

என நிறுவுக. (செ.ப.க.)

$$\Delta = abcd \begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & 1+\frac{1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d}+1 \end{vmatrix}$$

(a, b, c, d ஆகியவற்றை அந்தந்த நிரைகளினின்றும் பொதுக் காரணியாக எடுக்கவும்.)

$$= abcd \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} & \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+1 & \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+1 & \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d}+1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d}+1 \end{vmatrix}$$

$$= abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{d} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$(C_2-C_1,\ C_3-C_1,\ C_4-C_1)$

$$= abcd\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+1\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$$\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^6$$ என நிரூபிக்க. (செ.ப.க.)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$ என இருக்கட்டும்.

$$= \begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2-a^3 & 2a-2a^2 & 1-a & 0 \\ a-a^2 & 1-a^2 & 1-a & 0 \\ 1-a & 2-2a & 1-a & 0 \end{vmatrix}$$

$[R_2-R_1;\ R_3-R_2,\ R_4-R_3]$

$$= -1\begin{vmatrix} a^2-a^3 & 2a(1-a) & (1-a) \\ a(1-a) & 1-a^2 & (1-a) \\ 1-a & 2(1-a) & (1-a) \end{vmatrix}$$

$$= -(1-a)^3\begin{vmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ a & 1+a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-a)^3\begin{vmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ a-a^2 & 1-a & 0 \\ 1-a & 1-a & 0 \end{vmatrix}$$ $[R_2-R_1,\ R_3-R_2]$

$$= -(1-a)^3 \begin{vmatrix} a-a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= -(1-a)^3 (1-a)^2 \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-a)^5 (a-1)$$

$$= (1-a)^6$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$$\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & x^3 & x^2 & x \\ x & 1 & x^3 & x_2 \\ x^2 & x & 1 & x^3 \end{vmatrix} = (x^4-1)^3 \text{ என நிறுவுக.}$$

(செ.ப.க.)

கொடுத்துள்ள அணிக்கோவை $\triangle$ என இருக்கட்டும். இதன் முதல் நிரலை x ஆலும், இரண்டாவது நிரலை x^2 ஆலும், மூன்ரு வதை x^3 ஆலும் பெருக்கினுல் கிடைப்பது

$$\triangle = \frac{1}{x \cdot x^2 \cdot x^3} \begin{vmatrix} x^4 & x^4 & x^4 & 1 \\ x & x^5 & x^5 & x \\ x^2 & x^2 & x^6 & x^2 \\ x^3 & x^3 & x^3 & x^3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{x^6} \begin{vmatrix} x^4-1 & x^4 & x^4 & 1 \\ 0 & x^5-x & x^5-x & x \\ 0 & 0 & x^6-x^2 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & x^3 \end{vmatrix} \quad [C_1-C_4,\ C_3-C_4,\ C_3-C_4]$$

$$= \frac{1}{x^6} \cdot (x^4-1) \begin{vmatrix} x^5-x & x^5-x & x \\ 0 & x^6-x^2 & x^2 \\ 0 & 0 & x^3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{x^6}(x^4-1)(x^5-x)\cdot x^2\cdot x^3 \begin{vmatrix} x^4-1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(x^4-1)}{x^6}\cdot x^6(x^4-1)(x^4-1).$$

$$= (x^4-1)^3.$$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$$\begin{vmatrix} ax-by-cz & ay+bx & cx+az \\ ay+bx & by-cz-ax & bz+cy \\ cx+az & bz+cy & cz-ax-by \end{vmatrix}$$

$= (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)(ax+by+cz)$ என நிருபிக்க.

$$\Delta = \begin{vmatrix} ax-by-cz & ay+bx & cx+az \\ ay+bx & by-cz-ax & bz+cy \\ cx+az & bz+cy & cz-ax-by \end{vmatrix}$$

முதல், இரண்டாம், மூன்றும் நிரல்களை முறையே x, y, z ஆல் பெருக்கி, முதல், இரண்டாம், மூன்றும் நிரைகளை முறையே a, b, c ஆல் பெருக்க,

$$\Delta = \frac{1}{abc.xyz}\times$$

$$\begin{vmatrix} a^2x^2-abxy-aczx & a^2y^2+abxy & cazx+a^2z^2 \\ abxy+b^2x^2 & b^2y^2-bcyz-abxy & b^2z^2+bcyz \\ c^2x^2+cazx & bcyz+c^2y^2 & c^2z^2-cazx-bcyz \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abcxyz}\times$$

$$\begin{vmatrix} a^2(x^2+y^2+z^2) & a^2y^2+abxy & cazx+a^2z^2 \\ b^2(x^2+y^2+z^2) & b^2y^2-bcyz-abxy & b^2z^2+bcyz \\ c^2(x^2+y^2+z^2) & bcyz+c^2y^2 & c^2z^2-cazx-bcyz \end{vmatrix}$$

$(C_1+C_2+C_3)$

$$= \frac{1}{abcxyz}(x^2+y^2+z^2) \times$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2y^2+abxy & cazx+a^2z^2 \\ b^2 & b^2y^2-bcyz-abxy & b^2z^2+bcyz \\ c^2 & bcyz+c^2y^2 & c^2z^2-cazx-bcyz \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x^2+y^2+z^2}{abcxyz} \times$$

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & y^2(a^2+b^2+c^2) & z^2(a^2+b^2+c^2) \\ b^2 & b^2y^2-bcyz-abxy & b^2z^2+bcyz \\ c^2 & bcyz+c^2y^2 & c^2z^2-cazx-bcyz \end{vmatrix} \quad (R_1+R_2+R_3)$$

$$= \frac{(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)\,bcyz}{abcxyz} \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ b & by-cz-ax & bz+cy \\ c & bz+cy & cz-ax-by \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)}{ax} \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & -cz-ax & cx \\ c & bz & -ax-by \end{vmatrix} \begin{bmatrix} C_2-yC_1, \\ C_3-zC_1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)}{ax} \times$$

$$[a^2x^2+aczx+bcyz+abxy-bcyz]$$

$$= (x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)(ax+by+cz)$$

பயிற்சி 1 (c)

கீழ்க்கண்ட அணிக்கோவைகளின் மதிப்புக் காண்க.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 21 & 17 & 7 & 10 \\ 24 & 22 & 6 & 10 \\ 6 & 8 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 7 & 13 & 10 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 4 \\ 8 & 12 & 11 & 7 \\ 4 & 10 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 7 & 4 \\ 4 & 7 & 0 & 3 \\ 7 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+acd \\ 1 & c & c^2 & c^3+abd \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{vmatrix} = 0$ எனக் காட்டுக.

7\. காரணி காண்க: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

8\. $$\begin{vmatrix} a^2+1 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^2 & b^2+1 & c^2 & d^2 \\ a^2 & b^2 & c^2+1 & d^2 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2+1 \end{vmatrix}$$
$= 1+a^2+b^2+c^2+d^2$ என நிறுவுக.

9\. $$\begin{vmatrix} x+a & x+2a & x+3a \\ x+2a & x+3a & x+4a \\ x+3a & x+4a & x+5a \end{vmatrix} = 0$$ என நிறுவுக.

10\. $$\begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 & (x+5)^2 \\ (x+3)^2 & (x+4)^2 & (x+5)^2 & (x+5)^2 \end{vmatrix}$$
$= 0$ என நிறுவுக.

11\. $$\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = 0$$ என நிறுவுக.

12\. $$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$
எனக் காட்டுக.

13. $$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$$
எனக் காட்டுக.

14. $$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8$$ என நிறுவுக.

15. $$\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = x^3\,(x+10)$$
என நிறுவுக.

16. $$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix} = 0$$ என நிறுவுக.

17. $$\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix}$$ —ன் மதிப்புக் காண்க.

18. A, B, C என்பவை ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் எனில்

$$\begin{vmatrix} -\cos C & \sin C & \cos C \\ \sin 2A & 0 & \sin 2B \\ \sin(A-B) & \cos(A-B) & \sin(A-B) \end{vmatrix} = \sin 2C$$ என நிறுவுக.

19. $\begin{vmatrix} a^2+\lambda & ab & ac & ad \\ ab & b^2+\lambda & bc & bd \\ ac & bc & c^2+\lambda & cd \\ ad & bd & cd & d^2+\lambda \end{vmatrix}$,

λ^3 ஆல் சரியாக வகுபடும் என நிறுவுக.

20. $\begin{vmatrix} 1+x & 1+y & 1+z \\ x^2+x & y^2+y & z^2+z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

$= (x-y)(y-z)(z-x)$ எனக் காட்டுக.

21. $\Delta = \begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+a \\ x+2 & x+3 & x+b \\ x+3 & x+4 & x+c \end{vmatrix}$,

x சார்பற்றது என நிறுவுக. மேலும் a, b, c கூட்டுத் தொடரில் அமைந்தால் $\Delta = 0$ எனவும் நிறுவுக.

22. $\begin{vmatrix} 1 & 1+x & 2+x \\ 8 & 2+x & 4+x \\ 27 & 3+x & 6+x \end{vmatrix} = 12x$ என நிறுவுக.

23. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d)\{(a-c)^2+(b-d)^2\}$

என நிறுவுக.

24. $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ (a-1)^2 & (b-1)^2 & (c-1)^2 \end{vmatrix}$

$= 4\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ எனக் காட்டுக.

25. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

ஒரு சரியான முப்படி என நிறுவுக.

26. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

என நிறுவுக.

27. $2s = a+b+c$ எனில்,

$$\begin{vmatrix} a^2 & (s-a)^2 & (s-a)^2 \\ (s-b)^2 & b^2 & (s-b)^2 \\ (s-c)^2 & (s-c)^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2s^2(s-a)(s-b)(s-c)$$ என நிறுவுக.

28. $\lambda = \beta\gamma + \alpha\delta$, $\mu = \gamma\alpha + \beta\delta$, $\nu = \alpha\beta + \gamma\delta$ எனில்,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda^2 & \mu^2 & \nu^2 \end{vmatrix}$$

$$= -(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)$$

என நிறுவுக.

29. $(a+b+c) = 0$ எனில்,

$$\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0$$-ன் தீர்வு காண்க.

30. $\begin{vmatrix} bc-a^2 & ca-b^2 & ab-c^2 \\ -bc+ca+ab & bc-ca+ab & bc+ca-ab \\ (a+c)(a+b) & (a+b)(b+c) & (b+c)(c+a) \end{vmatrix}$
$= 3(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c) \times (ab+bc+ca)$
என நிறுவுக.

31. a, b, c ஆகியவை வெவ்வேறு மதிப்பு உடையனவாகவும்
$\begin{vmatrix} a & a^3 & a^4-1 \\ b & b^3 & b^4-1 \\ c & c^3 & c^4-1 \end{vmatrix} = 0$ எனவும் இருந்தால்
$abc(ab+bc+ca) = a+b+c$ என நிறுவுக.

32. $\begin{vmatrix} a & a+b & a+2b & a+3b \\ a+3b & a & a+b & a+2b \\ a+2b & a+3b & a & (a+b) \\ a+b & a+2b & a+3b & a \end{vmatrix}$
$= -32b^3(2a+3b)$ எனக் காட்டுக.

பின்வருவனவற்றின் தீர்வு காண்க.

33. $\begin{vmatrix} x+2 & 0 & 1 \\ 2 & x+1 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

34. $\begin{vmatrix} x-2 & 4 & 8 \\ x+3 & x & 1 \\ x-1 & x+1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

35. $\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = 0$

36. $$\begin{vmatrix} a-x & b & c & d \\ a & b-x & c & d \\ a & b & c-x & d \\ a & b & c & d-x \end{vmatrix} = 0$$

37. $$\begin{vmatrix} x & x-1 & x-2 \\ 2x+3 & 2 & 3 \\ 2x+4 & 15x+21 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

38. $$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$ -ன் மதிப்புக் காண்க.

39. $$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ (a-1)^2 & (b-1)^2 & (c-1)^2 \end{vmatrix}$$
$= -4\,(a-b)(a-c)(c-a)$ எனக் காட்டு.

40. $$\begin{vmatrix} \sin A & \cos A & \sin C & \cos C \\ -\cos A & \sin A & -\cos C & \sin C \\ -\sin C & \cos C & \sin A & -\cos A \\ -\cos C & -\sin C & \cos A & \sin A \end{vmatrix} = 4$$ என நிரூபிக்க.

41. $$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 1+x & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1+x & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix} = (n+x)x^{n-1}$$ என நிறுவுக.

42. $$\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2+x & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3+x & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n+x \end{vmatrix}$$

$= x^{n-1}\,[x+\frac{1}{2}n\,(n-1)]$ என நிறுவுக.

43. $$\begin{vmatrix} a & a+b & a+2b & \dots & a+nb \\ a+nb & a & a+b & \dots & a+\overline{n-1}b \\ a+\overline{n-1}b & a+nb & a & \dots & a+\overline{n-2}b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+b & a+2b & a+3b & \dots & a \end{vmatrix}$$

$= (-b)^n\,(n+1)^n\,.\,(a+\frac{1}{2}nb)$ என நிறுவுக.

44. $$\begin{vmatrix} \sin^2 A & \sin A\cos A & \cos^2 A \\ \sin^2 B & \sin B\cos B & \cos^2 B \\ \sin^2 C & \sin C\cos C & \cos^2 C \end{vmatrix}$$

$= \sin(A-B)\,\sin(A-C)\sin(B-C)$ என நிறுவுக.

இங்கு $A+B+C=\pi$

45. $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$$

$= (y-x)\,(z-x)\,(x-y)\,(yz+zx+xy)$ எனக் காட்டுக.

1·12. ஒரே நிலையில் அமைந்த இரு அணிக் கோவைகளின் பெருக்குத் தொகை காணுதல் :

தேற்றம் 9 :

மூன்றும் நிலைகள் அணிக் கோவைகள் இரண்டின் பெருக்குத் தொகை மூன்றும் நிலையிலமைந்த மற்ருேர் அணிக்கோவை ஆகும்.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ எனவும் } D' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

எனவும் கொள்க.

$$\Delta =$$

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

என்ற அணிக்கோவையையும் கருதுவோம். Δ ஐ 27 அணிக் கோவைகளின் கூடுதலாக எழுதலாம். ஏனெனில் Δ-ன் ஒவ்வொரு நிரலில் அமைந்த மூலகங்களும் 3 ராசிகளின் கூடுதலாக இருக்கின்றன. இந்த 27 அணிக்கோவைகளுள் சான்ருக

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\alpha_2 & a_1\alpha_3 \\ a_2\alpha_1 & a_2\alpha_2 & a_2\alpha_3 \\ a_3\alpha_1 & a_3\alpha_2 & a_3\alpha_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_1\beta_2 & c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 & b_2\beta_2 & c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 & b_3\beta_2 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & c_1\gamma_2 & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 & c_2\gamma_2 & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1 & c_3\gamma_2 & b_3\beta_3 \end{vmatrix}$$

என்பவற்றைக் காட்டலாம். இவற்றை முறையே

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \alpha_1\beta_2\gamma_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\alpha_1\beta_3\gamma_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

என எழுதலாம். இவற்றுள் முதல் அணிக்கோவையின் மூன்று நிரல்களுமே சமமாயிருப்பதால் அதன் மதிப்பு பூச்சியமாகும். மற்ற இரு அணிக்கோவைகளின் கூடுதல்

$$(\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ஆகும். இதேபோன்று 27 அணிக்கோவைகளுள் 21 அணிக்கோவைகள் பூச்சியமாகும் என்று நாம் காணலாம். எஞ்சியுள்ள அணிக்கோவைகளின் கூடுதல்

$$(\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3$$

$$+ \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1) \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

அதாவது $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ஆகும்.

எனவே, $\Delta = D \cdot D'$

குறிப்பு :

இங்கு விளக்கப்பட்டத் தெரிப்பு பொதுவானது. எனவே இது n ஆம் நிலை அணிக்கோவைகள் இரண்டின் பெருக்குத் தொகைக்கும் பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{vmatrix}$$

ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகை கண்டு $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ $(p^3+q^3+r^3-3pqr) = A^3+B^3+C^3-3ABC$ என்று நிறுவுக. இங்கு A, B, C ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை a, b, c, p, q, r மூலம் கண்டறிக. (செ.ப.க.)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a(a^2-bc)-b(ca-b^2)+c(c^2-ab) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

இதேபோன்று $\begin{vmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{vmatrix} = p^3+q^3+r^3-3pqr$ ஆகும்.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ap+bq+cr & ar+bp+cr & aq+br+cp \\ aq+br+cp & ap+bq+cr & ar+bp+cr \\ ar+bp+cr & aq+br+cp & ap+bq+cr \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{vmatrix}$$

என எழுதலாம்.

இங்கு $A = ap+bq+cr,\ B = ar+bp+cr,\ C = aq+br+cp$

$\therefore$ கொடுத்துள்ள அணிக்கோவைகளின் பெருக்குத் தொகை

$$= \begin{vmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{vmatrix} = A^3+B^3+C^3-3ABC.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ எனவும் A_1, B_1, C_1 முறையே

a_1, b_1, c_1 ஆகியவற்றின் இணைக் காரணிகளாகவும் இருந்தால்,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \Delta^2$$ என நிறுவுக.

இப்போது $\Delta \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதன் மதிப்பு

$$= \begin{vmatrix} a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1 & a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2 & a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3 \\ a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1 & a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2 & a_2A_3+b_2B_3+c_2C_3 \\ a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1 & a_3A_2+b_3B_2+c_3C_2 & a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix}$$ [ஏனெனில் $a_rA_s+b_rB_s+c_rC_s$
$= \Delta \ (r=s$ எனில்$)$
$= 0 \ (r \neq s)$ எனில்]

$$= \Delta^3$$

$$\therefore \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \frac{\Delta^3}{\Delta} = \Delta^2$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$ ஐ வர்க்கப்படுத்துவதன் மூலம்,

$s_r = x^r + y^r + z^r$ எனில், $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = (x-y)^2\,(y-z)^2\,(z-x)^2$

என நிறுவுக. [செ. ப. க.]

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)\;(y-z)\;(z-x)$$

(ஏற்கெனவே நிறுவியுள்ளோம்.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+1+1 & x+y+z & x^2+y^2+z^2 \\ x+y+z & x^2+y^2+z^2 & x^3+y^3+z^3 \\ x^2+y^2+z^2 & x^3+y^3+z^3 & x^4+y^4+z^4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

எனவே, $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = (x-y)^2\,(y-z)^2\,(z-x)^2$

பயிற்சி 1 (d)

1. $(a^2+b^2+c^2+d^2)\;(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$ஐ நான்கு சரியான இருபடிகளின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதலாம் என நிறுவுக.

2. $$\begin{vmatrix} 2bc & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2$$

$= (a^3+b^3+c^3-3abc)^2$ என நிறுவுக.

3. $s_r = a^r + b^r + c^r + d^r$ ஐக் குறிக்குமெனில்,

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix} = [(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)]^2$$ என நிறுவுக.

4. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$-ல் $A_1, B_1, C_1 \ldots$, முறையே $a_1, b_1, c_1 \ldots$ ஆகியவற்றின் இணைக் காரணிகள் எனில்,

$$\begin{vmatrix} B_1+C_1 & C_1+A_1 & A_1+B_1 \\ B_2+C_2 & C_2+A_2 & A_2+B_2 \\ B_3+C_3 & C_3+A_3 & A_3+B_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2$$

என நிறுவுக.

5. $$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ba & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2$$

$= 4a^2b^2c^2$ என நிறுவுக.

6. $$\begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}^2$$

என நிறுவுக.

7. A, B, C ஆகியவை ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களெனில்,

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0$$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$ எனக் காட்டுக.

8. $$\begin{vmatrix} x & l & m & 1 \\ \alpha & x & n & 1 \\ \alpha & \beta & x & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix}$$ -ன் மதிப்பை,

இதை $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ என்ற அணிக்கோவையுடன் பெருக்குவதன் மூலம் காண்க.

9. $$\begin{vmatrix} (ax+1)^2 & (ay+1)^2 & (az+1)^2 \\ (bx+1)^2 & (by+1)^2 & (bz+1)^2 \\ (cx+1)^2 & (cy+1)^2 & (cz+1)^2 \end{vmatrix}$$ ஐ

இரு அணிக்கோவைகளின் பெருக்குத் தொகையாக அமைக்க. மேலும் இதன் மதிப்பு $2(a-b)(b-c)(c-a)(x-y)(y-z)(z-x)$ என நிறுவுக.

1·13. அணிக்கோவைகளை ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் தீர்வு காண்பதற்குப் பயன்படுத்துவதற்குக் கீழ்க் கண்ட சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ என இருக்கட்டும். இதில் a_1, a_2...

... ஆகியவற்றின் சிற்றணிக் கோவைகள் முறையே A_1', A_2', A_3' ... ... ஆக இருக்கட்டும்.

(1) $\times A_1' -$ (2) $\times A_2' +$ (3) $\times A_3'$ ... ... எடுத்தால்,
$(a_1 A_1' - a_2 A_2' + a_3 A_3') x + (b_1 A_1' - b_2 A_2' + b_3 A_3') y + (c_1 A_1' - c_2 A_2' + c_3 A_3') z = d_1 A_1 - d_2 A_2 + d_3 A_3$
ஆனால் $b_1 A_1' - b_2 A_2' + b_3 A_3' = c_1 A_1' - c_2 A_2' + c_3 A_3' = 0$

$$\therefore \quad (a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3) x = d_1 A_1 - d_2 A_2 + d_3 A_3$$

$$x = \frac{d_1 A_1 - d_2 A_2 + d_3 A_3}{a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3}$$

$$= \frac{[d_1 \, b_2 \, c_3]}{[a_1 \, b_2 \, c_1]}$$

இதே போன்று $$y = \frac{[a_1 \, d_2 \, c_3]}{[a_1 \, b_2 \, c_3]}$$

$$z = \frac{[a_1 \, b_2 \, d_3]}{[a_1 \, b_2 \, c_3]}$$

கொடுக்கப்பட்ட x, y, z-ல் அமைந்த நான்கு சமன்பாடுகளிலிருந்து x, y, z ஐ நீக்குவதற்கும் அணிக்கோவையைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$$

$$a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0$$

கடைசி மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{x}{[b_2 \, c_3 \, d_4]} = \frac{-y}{[c_2 \, d_3 \, a_4]} = \frac{z}{[d_2 \, a_3 \, b_4]} = \frac{-1}{[a_2 \, b_3 \, c_4]}$$

x, y, z - ன் இம்மதிப்புகளை முதல் சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு முழுவதும் பொதுக் காரணியால் பெருக்க,

$$\{a_1 [b_2\ c_3\ d_4] - b_1 [c_2\ d_3\ a_4] + c_1 [d_2\ a_3\ b_4] - d_1 [a_2\ b_3\ c_4]\} = 0.$$

அதாவது,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0 \text{ எனக் கிடைகிறது.}$$

இது x, y, z சார்பற்ற கோவையாகும். கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டிலும் குணகங்களுக்கிடையேயுள்ள இது போன்ற அணிக் கோவை வழித் தொடர்பு நீக்கற்பலன் (eliminant) எனப்படும். இந்த விளைவு நிறைவு செய்யப்பட்டால் அது இசைவுடைமை (consistency) எனப்படும். அதாவது கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் இசைவுடையன என்கிறோம்.

சான்றாக, $x + 2y - z = -1$

$$3x - y - 2z = 5$$

$$x - y - 3z = 0$$

$$x + y + z = 2$$

என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்,

இவற்றுள் எவையேனும் மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து கிடைக்கும் x, y, z-ன் மதிப்புகள் நான்காவது சமன்பாட்டிற்கும் பொருந்தி வந்தால் சமன்பாடுகள் இசைவுடையன ஆகும். இங்கு முதல் மூன்று சமன்பாடுகளினின்றும் $x = 2,\ y = -1,\ z = 1$ ஆகும். இம் மதிப்புகள் $x+y+z=2$ ஐ நிறைவு செய்வதால் கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் இசைவுடையன.

எடுத்துக்காட்டு 1:

அணிக்கோவைகளைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

$$5x + 5y - 7z = 13$$

$$4x + y - 12z = 6$$

$$2x + 9y - 3z = 20$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 \\ 4 & 1 & -12 \\ 2 & 9 & -3 \end{vmatrix}$$ என இருக்கட்டும்.

$$= 3(-3+108) - 5(-12+24) - 7(36-2)$$
$$= 315 - 60 - 238 = 17$$

$$D \cdot x = \begin{vmatrix} 3x & 5 & -7 \\ 4x & 1 & -12 \\ 2x & 9 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3x+5y-7z & 5 & -7 \\ 4x+y-12z & 1 & -12 \\ 2x+9y-3z & 9 & -3 \end{vmatrix} [C_1 + y\,C_2 + zC_3]$$

$$= \begin{vmatrix} 13 & 5 & -7 \\ 6 & 1 & -12 \\ 20 & 9 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 13(-3+108) - 5(-18+240) - 7(54-20)$$
$$= 1365 - 1110 - 238 = 17$$

$$\therefore\ x = \frac{17}{D} = 1.$$

இதேபோன்று $y = \begin{vmatrix} 3 & 13 & -7 \\ 4 & 6 & -12 \\ 2 & 20 & -3 \end{vmatrix} \div D$

$$= \frac{1}{17}[3(-18+240) - 13(-12+24)$$
$$-7(80-12)]$$

$$= \frac{1}{17} \cdot 34 = 2.$$

$$z = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 13 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 9 & 20 \end{vmatrix} \div D$$

$$= \frac{1}{17}[3(20-54)-5(80-12)+13(36-2)]$$

$$\frac{1}{17}[0] = 0.$$

$\therefore \quad x = 1, y = 2, z = 0.$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளினின்றும் x, y, z ஐ நீக்குக.

$$ax + y + z + 1 = 0$$

$$x + ay = 0$$

$$y + z = 0$$

$$x + y + z + a = 0$$

இவற்றின் நீக்கற்பலன்

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது $a(a-1) = 0.$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க,

$$x + y + z = d$$

$$ax + by + cz = d^2$$

$$a^2 x + b^2 y + c^2 z = d^3$$

$$x = \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ d^2 & b & c \\ d^3 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= d \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{d\,(b-c)\,(c-d)\,(d-b)}{(a-b)\,(b-c)\,(c-a)}$$

$$= \frac{d\,(c-d)\,(d-b)}{(a-b)\,(c-a)}$$

இதே போன்று $y = \dfrac{d\,(d-c)\,(a-d)}{(b-c)\,(a-b)}$ எனவும்,

$z = \dfrac{d\,(d-a)\,(b-d)}{(b-c)\,(c-a)}$ எனவும் நிறுவலாம்.

பயிற்சி 1 (e)

கீழ்க்கண்ட ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

1. $x + 2y + 5z = 28$
   $3x + y + 4z = 26$
   $8x + y + 7z = 47$

2. $5x - 6y + 4z = 15$
   $7x + 4y - 3z = 19$
   $2x + y + 6z = 46$

3. $x + y + z = 1$
   $ax + by + cz = k$
   $a^2x + b^2y + c^2z = k^2$

4. $x+y+z = 9$

$2x+5y+7z = 52$

$2x+y-z = 0$

5. $x+2y+3z = 11$

$2x-y+4z = 13$

$3x+4y-5z = 3$

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் இசைவுடையனவாயிருக்க k-ன் மதிப்புக் காண்க :

6. $2x+3y+z+kw = 0$

$x+2y-4z-6w = 0$

$2x+5y-2z+w = 0$

$3x+y-3z-kw = 0$

7. x, y, z ஆகியவை ஒருங்கே பூச்சியமாக இல்லாவிடில்,

$ax+cy+bz = 0$

$bx+ay+cz = 0$

$cx+by+az = 0$ எனில், $a^3+b^3+c^3-3abc = 0$ எனக் காட்டுக.

8. a-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்,

$$a^2x+(a+1)^2y+(a+2)^2z+(a+3)^2 = 0$$
$$(a+1)^2x+(a+2)^2y+(a+3)^2z+(a+4)^2 = 0$$
$$(a+2)^2x+(a+3)^2y+(a+4)^2z+(a+5)^2 = 0$$
$$(a+3)^2x+(a+4)^2y+(a+5)^2z+(a+6)^2 = 0$$

என்ற சமன்பாடுகள் இசைவுடையன என நிறுவுக.

9. $x = \frac{a}{b-c}$, $y = \frac{b}{c-a}$, $z = \frac{c}{a-b}$ எனில்

$1+yz+zx+xy = 0$ என நிறுவுக.

2. சமன்பாட்டுக் கொள்கை

2.1 வரையறைகள் :

சமன்பாடுகள், முற்றொருமைகள் : $f(x)$ ஐப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்தும்போது x-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கு அது உண்மையானல் $f(x) = 0$ என்பது ஒரு சமன்பாடு எனப்படும். x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f(x) = 0$ எனில் $f(x) = 0$ ஒரு முற்றொருமையாகும். (உ-ம்.) $x^2 - 3x + 2 = 0$ ஆனது $x = 1$, $x = 2$ என்ற மதிப்புகளுக்கு மட்டுமே உண்மை ஆவதால் இது ஒரு சமன்பாடாகும். ஆனல் $x^2 - 2x + 1 - (x-1)^2 = 0$ ஒரு முற்றொருமை.

மூலம் ; x-ன் எம்மதிப்புகளுக்கு $f(x)$ பூச்சியமாகிறதோ அம்மதிப்புகள் $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனப்படும்.

தீர்வுகள் : ஒரு சமன்பாட்டின் மூலங்களேக் கண்டுபிடித்தல் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணுதல் எனப்படும்.

அளவுக்கிணங்கிய சார்பு : $f(x)$-ல், x-ன் படிகள் அளவுக் கிணங்கியவையாக இருப்பின் $f(x)$ அளவுக்கிணங்கிய சார்பு எனப்படும்.

$$(\text{உ-ம்.})\ x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 7x - \frac{4}{x^2}.$$

முழுச் சார்பு : $f(x)$-ல் x-ன் அடுக்குக் குறிகள் கூட்டு முழு எண்ணுகவே இருப்பின், $f(x)$ முழுச் சார்பு எனப்படும்.

$$(\text{உ-ம்.})\ a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots \dots + a_{n-1}x + a_n \text{ அல்லது}$$
$$x^n + p_1x^{n-1} + \dots \dots + p_{n-1}x + p_n \text{ என்பது}$$

n கூட்டு முழு எண்ணுகவும், $a_0, a_1, \dots, a_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ என்பவை x சார்பற்றனவாயும் இருக்கும்போது அளவுக்கிணங்கிய முழுச் சார்பு (rational integral function) எனப்படும்.

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ என்பது x-ல் ஒரு n படிச் சமன்பாடாகும். இங்கு $a_0 \neq 0$ எனக் கொள்ள வேண்டும். ஏனெனில் $a_0 = 0$ எனில் சமன்பாட்டின்படி $(n-1)$ என்றாகிவிடும்.

2·2. அடிப்படைத் தேற்றம் :

1. ஒவ்வொரு விகிதமுறு முழுச்சார்பு சமன்பாட்டிற்கும் ஒரு தீர்வு உண்டு. இத் தீர்வு மெய்யெண்ணாகவோ அல்லது கற்பனை யாகவோ இருக்கலாம். இத்தேற்றத்தை இங்கு நிறுவாமலேயே ஏற்றுக்கொள்வோம்.

தேற்றம் 2 :

ஒவ்வொரு n படிச் சமன்பாட்டிற்கும் n தீர்வுகளே உள்ளன.

தெரிப்பு : $f(x) = 0$, ஒரு n படிச் சமன்பாடென இருக்கட்டும். இச்சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வு உண்டென எடுத்துக்கொண்ட அடிப்படைத் தேற்றத்தின்படி α_1 ஒரு தீர்வு எனக் கொள்வோம். எனவே $f(x)$, $(x-\alpha_1)$ ஆல் சரியாக வகுபடும்.

$\therefore\ f(x) = (x-\alpha_1)\,\phi_1(x)$ என எழுதலாம். இங்கு $\phi_1(x)$ x-ல் அமைந்த $(n-1)$படி பல்லுறுப்புக் கோவை. எனவே $\phi_1(x) = 0$ ஒரு தீர்வு பெற்றிருக்கும். அது α_2 எனக் கொண்டால் $(x-\alpha_2)\,\phi_1(x)$-ன் ஒரு காரணி.

$\therefore\ \phi_1(x) = (x-\alpha_2)\,\phi_2(x)$.

$\phi_2(x)$, $(n-2)$ ஆம் படி பல்லுறுப்புக்கோவை.

$\therefore\ f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\,\phi_2(x)$

இவ்வாறே ஒவ்வொரு தீர்வுக்கும் உரிய காரணி கண்டால்

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x+\alpha_n)\,\phi_n(x)$$

எனக் கிடைக்கும். $\phi_n(x)$-ன் படி $(n-n) = 0$ ஆகும். அதாவது $\phi_n(x)$, x சார்பற்றது.

$\therefore\ \phi_n(x) = k$ எனக் கொள்க.

$\therefore\ f(x) = k(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$

$f(x) = x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$ எனக் கொண்டால் $k = 1$.

$$\therefore \quad f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \dots (x-\alpha_n)$$

எனவே $x = \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ என்ற n மதிப்புகளுக்கு மட்டுமே $f(x)$ பூச்சியமாவதால் $f(x) = 0$ க்கு n மூலங்களே உள்ளன. மேலும் x-ன் வேறெந்த மதிப்புகளுக்கும் $f(x) \neq 0$ என்பதும் தெளிவு.

ஆகையால், $f(x) = 0$ எனும் n படி சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ என்ற n மதிப்புகள் மட்டுமே ஆகும்.

குறிப்பு :

(i) $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ ஆகியவை $f(x)=0$-ன் மூலங்கள் எனில் $f(x) = A\,[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \dots \dots (x-\alpha_n)] = 0$, A என்பது x சார்பற்றது.

(ii) $f(x)$ எனும் ஒரு n படி பல்லுறுப்புக்கோவை x-ன் n-க்கு மேற்பட்ட மதிப்புகளுக்கு பூச்சியமானால், $f(x)$ முற்றிலும் பூச்சியத் திற்குச் சமமாகும்.

(iii) $f(x) = 0$-ன் $\alpha_1 \alpha_2 \dots \dots \alpha_n$ என்ற n தீர்வுகளில் r தீர்வுகள் α-க்குச் சமமானால், $f(x) = (x-\alpha)^r \phi(x)$; $\phi(x)$ என்பது $(n-r)$ படிக் கோவையாகும். α என்பது $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் r முறை மடங்குத் தீர்வு (r multiple root) எனப்படும்.

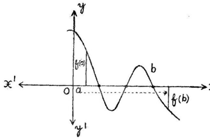
2·4. தேற்றம் 3 :

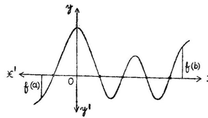
$f(a)$, $f(b)$ மாற்றுக் குறியீடுகள் பெற்றிருப்பின், a, b ஆகிய வற்றிற்கிடையில் $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒற்றைப் படை எண்ணிக்கையுள்ள மெய்யெண் தீர்வுகள் இருக்கும். (குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்வேனும் இருக்கும். ஒன்றுக்கு மேற்பட் டிருப்பின் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படையாக இருக்கும்).

தெரிப்பு :

$f(x)$ என்ற கோவை x-ல் ஒரு தொடர்புடைய சார்பு (continuous function) ஆகும். எனவே a, b-க்கு இடைப்பட்ட x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் $f(x)$, $f(a)$, $f(b)$-க்கு இடைப்பட்ட ஒவ்வொரு மதிப்பையும் ஏற்கும். ஆனால் $f(a)$, $f(b)$ ஆகியவை மாற்றுக் குறியீடு பெற்றிருப்பதால் பூச்சியம் இவற்றிற்கிடையி லுள்ள ஒரு மதிப்பாகும். அதாவது a, b-க்கு இடையிலுள்ள

x-ன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பிற்கேனும் $f(x)$ பூச்சியமாகிறது. x-ன் இம்மதிப்பு $f(x)=0$-ன் மூலமாகும். இத்தேற்றத்தை $y=f(x)$-ன் வரைபடம் மூலமாகவும் நிறுவலாம்.



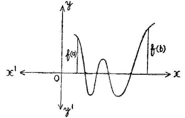


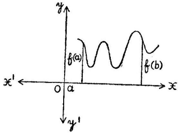
படம் 1

2·5. தேற்றம் 4 :

$f(a)$, $f(b)$ ஒரே குறியீடு பெற்றிருப்பின் a, b-இவற்றிற்கிடையில் $f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இரட்டைப் படை எண்ணிக்கையுள்ள மெய்யெண் தீர்வுகள் இருக்கும். [a, b-க்கு இடையில் $f(x)=0$-க்குத் தீர்வுகளே இல்லாமலும் அமையலாம்.]

ஏனெனில் இரு புள்ளிகளை ஒரு வளைவரையால் இணைக்கும் போது இப்புள்ளிகள் x அச்சின் ஒரே பக்கத்தில் இருந்தால் வளைவரையின் இப்புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள பகுதி x அச்சை வெட்டு மிடங்களின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படையாகவோ அல்லது பூச்சியமாகவோ இருக்கலாம்.





படம் 2

2·6 தேற்றம் 5 :

ஓர் ஒற்றைப்படைப் படி சமன்பாட்டிற்குக் குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்வேனும் உண்டு.

தெரிப்பு :

$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$ (n ஒற்றைப் படை நேர் முழு எண்) என்பது சமன்பாடு.

$f(-\infty) = -\infty$ ($\because$ n ஒற்றைப்படை எண்)

$f(0) = p_n$ (p_n, x சார்பற்றது)

$f(+\infty) = +\infty$

எனவே, p_n நேர் மதிப்புடையதாயின் $f(x) = 0$-க்கு $-\infty$, p_n ஆகியவற்றிற்கிடையில் ஒரு மூலம் உண்டு. p_n எதிர் மதிப்புடையதாயின் p_n, $+\infty$ ஆகியவற்றிற்கிடையில் $f(x) = 0$-க்கு ஒரு மூலமாவது உள்ளது.

குறிப்பு :

ஒற்றைப்படைப் படி சமன்பாட்டின் மாறிலி உறுப்பு கூட்டெண்ணுனல், குறைந்தது ஒரு குறை மெய்யெண் தீர்வும், மாறிலி உறுப்பு குறையெண்ணெனில், குறைந்தது ஒரு கூட்டு மெய்யெண் தீர்வும், $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு உண்டு.

2·7. தேற்றம் 6 :

ஓர் இரட்டைப்படைப் படி சமன்பாட்டில் மாறிலி உறுப்பு குறையெண்ணுனல், சமன்பாட்டிற்குக் குறைந்தது ஒரு கூட்டு மெய்யெண் தீர்வும் குறைந்தது ஒரு குறை மெய்யெண் தீர்வும் உண்டு.

தெரிப்பு :

$f(x) = x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$ (n இரட்டைப்படை எண்) என்ற சமன்பாட்டில் p_n குறை மதிப்புடையதாக இருக்கட்டும்.

$f(-\infty) = +\infty$ (ஏனெனில் n இரட்டைப்படை எண்)

$f(0) = p_n$ = குறை மதிப்பு

$f(+\infty) = +\infty$

எனவே, $-\infty$, 0 ஆகியவற்றிற்கிடையே ஒரு தீர்வும், 0, $+\infty$ ஆகியவற்றிற்கிடையே ஒரு தீர்வும் $f(x) = 0$-க்கு உண்டு.

குறிப்பு :

மாறிலி உறுப்பு கூட்டு மதிப்புடையதாயின் சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண் தீர்வே இல்லாமலும் போகலாம்; அல்லது மெய்யெண் தீர்வுகள் இருப்பின் அவற்றின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x_1, x_2 \ldots x_n$ என்பவை $(a_1-x)(a_2-x) \ldots (a_n-x)+k=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், $a_1, a_2 \ldots a_n$ என்பவை $(x_1-x)(x_2-x) \ldots (x_n-x)-k=0$-ன் மூலகங்கள் என நிறுவுக.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ஆகியவை $(a_1-x)(a_2-x) \ldots \ldots (a_n-x)+k=0$-ன் மூலங்கள்.

எனவே,

$$(a_1-x)(a_2-x) \ldots (a_n-x)+k=(x_1-x)(x_2-x) \ldots (x_n-x)$$

$$\therefore \quad (x_1-x)(x_2-x) \ldots (x_n-x)-k=(a_1-x)(a_2-x) \ldots \ldots (a_n-x)$$

$\therefore \quad a_1, a_2 \ldots a_n$ ஆகியவை $(x_1-x)(x_2-x) \ldots (x_n-x)-k=0$-ன் மூலங்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\alpha, \beta, \gamma \ldots$ என்பவை $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots \ldots + p_{n-1}x+p_n=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில்,

$$(1+\alpha^2)(1+\beta^2) \ldots = (1-p_2+p_4-p_6+\ldots)^2 + (p_1-p_3+\ldots)^2$$ என நிறுவுக.

$\alpha, \beta, \gamma \ldots$ என்பவை $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_n=0$-ன் மூலங்கள் ஆதலால்,

$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_n \equiv (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \ldots$ இதன் இரு புறமும் முறையே $i, -i$ என அடுத்தடுத்துப் பிரதியிட்டு இரண்டையும் பெருக்கினால்

$$(i-\alpha)(i-\beta)(i-\gamma) \ldots (-i-\alpha)(-i-\beta) \ldots = (i^n+p_1i^{n-1}+\ldots+p_n)\{(-i)^n+p_1(-i)^{n-1}+\ldots \ldots+p_n\}$$

அதாவது,

$$(\alpha-i)(\alpha+i)(\beta-i)(\beta+i) \ldots \ldots = i^n[(1-p_2+p_4 \ldots)-i(p_1-p_3+\ldots)]$$

$$(\times i^n)[(1-p_2+p_4-\ldots)+i(p_1-p_3+\ldots)]$$

$$\therefore \quad (\alpha^2+1)(\beta^2+1)(\gamma^2+1) \ldots \ldots = [(1-p_2+p_4-p_6+\ldots)^2+(p_1-p_3+\ldots)^2]$$

பயிற்சி 2 (a)

1. $x^3+3px+q$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு ஒரு காரணி $x^2-2ax+a^2$ என்ற அமைப்பில் இருந்தால் $q^2+4p^3=0$ என நிறுவுக.

2. px^3+qx+r என்ற முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு ஒரு காரணி x^2+ax+1 என்ற அமைப்பில் இருந்தால், $(p^2-r^2)(p^2-r^2+qr)=p^2q^2$ என நிறுவுக.

3. $x^4+px^3=rx+s^2$ ஒரு நிறை வர்க்கமானல் (perfect square) $ps=\pm r$, $p^3+8r=0$ என நிறுவுக.

4. L, B, Y என்பன $(x+a)(x+b)(x+c)=d$-ன் தீர்வுகளாயின், a, b, c என்பன $(x+L)(x+B)(x+Y)=d$-ன் தீர்வுகளெனக் காண்பி.

5. a, b, c என்பவைகள் கூட்டெண்களாயின்,

$$\frac{1}{(x-a)}+\frac{1}{(x-b)}+\frac{1}{(x-c)}=\frac{1}{x}$$ -ன் தீர்வுகள் மெய்யெண்கள் என்று நிரூபி.

6. $x^3-px+q=0$ என்ற சமன்பாட்டை $(x^2+mx+n)^2=x^4$ என்ற அமைப்பில் கொண்டால், p, q என்பவற்றிடையே உள்ள தொடர்பைக் காண்க.

7. a, b, c என்பவைகள் மெய்யெண்களாக இருப்பின்,

$$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}=\frac{3}{x}$$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளும் மெய்யானவை என்று நிரூபி.

8. $x^4-6x^3+8x^2-17x+10=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு 5 ஒரு தீர்வானல், மற்ற 3 தீர்வுகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

9. 1, 7 என்பன $x^4-16x^3+86x^2-176x+105=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளானல், மற்ற இரண்டு தீர்வுகளையும் கண்டுபிடி.

10. $-\frac{3}{2}$, 3, $\frac{1}{7}$ ஐத் தீர்வுகளாக உடைய சமன்பாடு காண்க.

2·8. தேற்றம் 7 :

மெய்யெண் கெழுக்களை உடைய சமன்பாட்டில் கற்பனை மூலங்கள் துணையியக் கற்பனை எண்களாகத் தோன்றும்.

தெரிப்பு : $f(x) = 0$ சமன்பாடாகவும், இதில் $\alpha + i\beta$ ஒரு கற்பனை மூலமாகவும் இருக்கட்டும்.

$$(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta) = (x-\alpha)^2 + \beta^2$$

$f(x)$ ஐ $(x-\alpha)^2 + \beta^2$ ஆல் வகுத்தால், ஈவு $Q(x)$ எனவும் மீதி $Ax + B$ எனவும் இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad f(x) \equiv [(x-\alpha)^2 + \beta^2]\, Q(x) + Ax + B$$
$$\equiv (x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)\, Q(x) + Ax + B$$

$x = \alpha + i\beta$ என இதில் பிரதியிட,

$$f(\alpha+i\beta) = [\alpha+i\beta-\alpha-i\beta]\,[\alpha+i\beta-\alpha+i\beta]\, Q(\alpha+i\beta) + A(\alpha+i\beta) + B$$
$$= A(\alpha+i\beta) + B$$

ஆனால் $(\alpha+i\beta)$, $f(x)=0$-ன் தீர்வு ஆதலால் $f(\alpha+i\beta)=0$

$$\therefore \quad A(\alpha+i\beta) + B = 0$$

மெய்யெண் பகுதியையும், கற்பனை எண் பகுதியையும் தனித் தனியே சமப்படுத்தினல்,

$$A\alpha + B = 0$$
$$A\beta = 0$$

$\beta \neq 0$. எனவே $A = 0$

$$\therefore \quad B = 0$$

$$\therefore \quad f(x) = (x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)\, Q(x)$$

எனவே, $(\alpha - i\beta)$-உம் $f(x)$-ன் ஒரு மூலமாகும்.

2·9. தேற்றம் 8 :

அளவுக்கிணங்கிய கெழுக்களை உடைய சமன்பாட்டின், இருபடி மூலத் தீர்வுகள் துணையிய மூலங்களாகவே தோன்றும் (In an equation with rational coefficients, the roots which are quadratic surds occur in conjugate pairs).

தெரிப்பு : $f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டில் $a+\sqrt{b}$ ஒரு தீர்வெனக் கொள்வோம். இங்கு, a, b ஆகியவை அளவுக்கிணங்கிய எண்கள், $\sqrt{b}$ இருபடி மூலம்; b வர்க்க எண் அல்ல.

$$(x-a-\sqrt{b})\,(x-a+\sqrt{b}) = (x-a)^2-b$$

$f(x)$ ஐ $\{(x-a)^2-b\}$ ஆல் வகுத்தால் ஈவு $Q(x)$ எனவும், மீதி $Ax+B$ எனவும் இருக்கட்டும். இங்கு A, B என்பன விகிதமுறு எண்கள்,

$$\therefore\ f(x) \equiv \{(x-a)^2-b\}\ Q(x) + Ax+B$$

இதில் $x=a+\sqrt{b}$ எனப் பிரதியிட,

$$f(a+\sqrt{b}) = [(a+\sqrt{b}-a)^2-b]\ Q(a+\sqrt{b})+A(a+\sqrt{b})+B$$

$$= A\,(a+\sqrt{b}) + B$$

$(1+\sqrt{b})$, $f(x)=0$-ன் ஒரு மூலம் ஆதலால் $f(a+\sqrt{b}) = 0$

$$\therefore\ A\,(a+\sqrt{b}) + B = 0.$$

$$\therefore\ Aa + B = 0$$

$$A\sqrt{b} = 0$$

$\sqrt{b} \neq 0$ ஆதலின் $A = 0$

$$\therefore\ B = 0$$

எனவே, $f(x) = [(x-a)^2-b]\ Q(x)$

$$= (x-a-\sqrt{b})\,(x-a+\sqrt{b})\ Q(x)$$

$\therefore$ $f(x) = 0$-ன் ஒரு தீர்வு $a+\sqrt{b}$ எனில் $a-\sqrt{b}$-ம் ஒரு தீர்வு என்று கிடைக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^5-x^4+8x^2-9x-15=0$-ன் மூலங்களுள் இரண்டு, $\sqrt{3}$, $1-2i$ எனில், சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

சமன்பாட்டின் கெழுக்கள் அளவுக்கிணங்கிய மெய்யெண்கள் ஆதலால் $1+2i$, $-\sqrt{3}$ ஆகியவையும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாதல் வேண்டும்.

$\therefore\ x^5 - x^4 8x+^2 - 9x - 15$) ஆனது $(x-\sqrt{3})$, $(x+\sqrt{3})$, $(x-\overline{1+2i})$, $(x-\overline{1-2i})$ ஆகியவற்றால் மீதியின்றி வகுபட வேண்டும்.

அதாவது, (x^2-3), $[(x-1)^2+4]$ ஆகியவை $(x^5-x^4+8x^2-9x-15)$-ன் காரணிகள்.

$\therefore\ (x^5-x^4+8x^2-9x-15) \equiv (x^2-3)\ \ (x^2-2x+5)\ (x+1)$.

$\therefore$ கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் ஐந்தாவது மூலம் $x=-1$.

$\therefore$ சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\pm\sqrt{3}$, $1\pm 2i$, -1 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^4-5x^3+4x^2+8x-8=0$-ன் ஒரு மூலம் $1-\sqrt{5}$ எனில் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$(1-\sqrt{5})$ ஒரு மூலம் ஆதலின் $(1+\sqrt{5})$ மற்றொரு மூலமாகும்.

இம்மூலங்களுக்கேற்ற காரணிகள் $(x-\overline{1-\sqrt{5}})$, $(x-\overline{1+\sqrt{5}})$

எனவே $x^4-5x^3+4x^2+8x-8$ ஐ $\{(x-1)^2-5\}$ அதாவது (x^2-2x-4) ஆல் வகுத்தால் வரும் ஈவு (x^2-3x+2).

$\therefore\ x^4-5x^3+4x^2+8x-8 \equiv (x^2-3x+2)(x^2-2x-4)$

$\therefore$ கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மற்ற மூலங்கள் 2, 1 ஆகும்.

$\therefore$ சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $1\pm\sqrt{5}$, 1, 2.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$3x^3-4x^2+x+88=0$-ன் ஒரு மூலம் $2+\sqrt{-7}$ எனில் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$2+\sqrt{-7}$ ஒரு மூலம். எனவே $(2-\sqrt{-7})$-ம் ஒரு மூலமாகும். இம்மூலங்களுக்குரிய காரணிகள் $(x-\overline{2+\sqrt{-7}})$, $(x-\overline{2-\sqrt{-7}})$.

எனவே,

$$(3x^3-4x^2+x+88) \equiv [(x-2)^2+7][3x+a]$$
$$\equiv [(x^2-4x+11)(3x+8)]$$

எனவே சமன்பாட்டின் மூன்றுவது மூலம் $-\frac{8}{3}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$\frac{A^2}{x-a}+\frac{B^2}{x-b}+\frac{C^2}{x-c}+\dots+\frac{L^2}{x-l}=x-m$$

[$a, b, c \dots l$ ஒன்றையொன்று மாறுபட்ட மதிப்புடையவை] என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் யாவும் மெய்யெண் மதிப்புடையவை என நிறுபிக்க.

முடியுமெனில் $\alpha+i\beta$ (α, β மெய்யெண்கள்) சமன்பாட்டின் ஒரு மூலமாக இருக்கட்டும். எனவே $(\alpha-i\beta)$ மற்றொரு மூலமாகும்.

$$\therefore \frac{A^2}{(\alpha-a)+i\beta}+\frac{B^2}{(\alpha-b)+i\beta}+\frac{C^2}{(\alpha-c)+i\beta}$$
$$+\dots+\frac{L^2}{(\alpha-l)+i\beta}=(\alpha+i\beta-m) \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{A^2}{(\alpha-a)-i\beta}+\frac{B^2}{(\alpha-b)-i\beta}+\dots+\frac{L^2}{(\alpha-l)-i\beta}$$
$$=(\alpha-m)-i\beta \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

(2) இலிருந்து (1) ஐக் கழிக்க

$$2i\beta\left[\frac{A^2}{(\alpha-a)^2+\beta^2}+\frac{B^2}{(\alpha-b)^2+\beta^2}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{L^2}{(\alpha-l)^2+\beta^2}\right]=-2i\beta$$

$$\therefore 2i\beta\left[\frac{A^2}{(\alpha-a)^2+\beta^2}+\frac{B^2}{(\alpha-b)^2+\beta^2}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{L^2}{(\alpha-l)^2+\beta^2}+1\right]=0$$

அடைப்புக் குறிக்குள் அமைந்துள்ளது கூட்டாயம் கூட்டு மதிப்புடையது. எனவே அது பூச்சியமாக முடியாது. எனவே, $\beta=0$,

அதாவது கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டிற்குக் கற்பனை மூலங்களே இருக்க முடியாது.

பயிற்சி 2 (b)

1. $3-\sqrt{10}$ என்பது $x^4-8x^3+16x^2-28x-5=0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வானால் மற்றத் தீர்வுகளைக் கண்டு பிடி.

2. கீழே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளில் ஏதேனும் ஒரு தீர்வு கொடுக்கப்பட்டால் மற்றத் தீர்வுகளைக் காண்க.

சமன்பாடு	ஏதேனும் ஒரு தீர்வு
(a) $2x^4-11x^3+17x^2-10x+2=0.$	$2+\sqrt{2}$
(b) $x^4-x^3-2x^2-7x+3=0.$	$\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$
(c) $6x^6-53x^5+206x^4-353x^3+336x^2+174x+36=0$	$3+\sqrt{3}.$
(d) $x^5-x^4+8x^2-9x-15=0.$	$-\sqrt{3}$
(e) $3x^5-4x^4-42x^3+56x^2+27x-36=0.$	$\sqrt{2}+\sqrt{5}$
(f) $2x^6-3x^5+5x^4+6x^3-27x+81=0.$	$\sqrt{2}-i$
(g) $2x^4-17x^3+68x^2+170x-100=0.$	$5+5i$
(h) $x^4+2x^3-5x^2+6x+2=0.$	$1+i$
(i) $3x^3-4x^2+x+88=0.$	$2+i\sqrt{7}$
(j) $x^4-4x^2+8x+35=0.$	$2+i\sqrt{3}.$

3. $a, b, c, \ldots, k$ ஆகியவைகள் ஒன்றுக்கொன்று வித்தியாசமானவை. $\dfrac{a^2}{x-a} + \dfrac{b^2}{x-b} + \dfrac{c^2}{x-c} + \cdots \cdots + \dfrac{k^2}{x-k} = x-m$ என்ற சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு கற்பனையாக இருக்க முடியாது என்று காட்டு.

2·10. ஒரு சமன்பாட்டின் கெழுக்களுக்கும் அதன் மூலங்களுக்குமிடையே அமைந்த தொடர்புகள்

$f(x) = x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ என இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \dots (x-\alpha_n)$$

$$= x^n - x^{n-1}(\Sigma\alpha_1) + (\Sigma\alpha_1\alpha_2)x^{n-2} + \dots + (-1)^n\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$$

$$= x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} - \dots + (-1)^nS_n$$

என எழுதினால் S_r என்பது $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ஆகியவற்றில் r, r தீர்வுகளாகப் பெருக்கி, கூட்டிய தொகையைக் குறிக்கும். (அதாவது $S_r = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_r + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 \dots \alpha_{r+1} + \dots {}^nc_r$ உறுப்புகள்) இருபுறமும் சமப்படிகளின் கெழுக்களை ஒப்பிட,

$$p_1 = -S_1 \qquad \therefore \; S_1 = -p_1$$
$$p_2 = S_2$$
$$p_3 = -S_3 \qquad \therefore \; S_3 = -p_3$$
$$\dots \dots \dots$$
$$p_r = (-1)^rS_r \qquad \therefore \; S_r = (-1)^rp_r$$
$$p_n = (-1)^nS_n \qquad \therefore \; S_n = (-1)^np_n$$

மேற்குறித்த சமன்பாடு

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

எனக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், முழுவதும் a_0 ஆல் வகுக்கச் சமன்பாடு,

$$x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \frac{a^2}{a_0}x^{n-2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0}x^1 + \frac{a_n}{a_0} = 0$$

என்றுகிறது.

$$\therefore \quad \Sigma\alpha_1 = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$S_2 = \Sigma\alpha_1\alpha_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$S_3 = \Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + = \frac{a_3}{a_0}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$S_n = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}$$

இந்த n சமன்பாடுகள் மட்டும் வைத்து ஒரு சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காணுதல் என்பது கடினம். ஆனால் இவையல்லாத வேறு ஒரு தொடர்பு மூலங்களுக்கிடையே கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் இங்குக் குறித்துள்ள n சமன்பாடுகளின் உதவி கொண்டு மூலங்களைச் சில சமயங்களில் எளிதில் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^3-7x^2+36=0$-ன் ஒரு மூலம் மற்றொரு மூலத்தைப் போன்று இரு மடங்கு எனில் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

மூலங்களை α, β, γ எனக் கொண்டால்,

$$\alpha+\beta+\gamma=7$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$$
$$\alpha\beta\gamma=-36$$

ஆனால், $\beta=2\alpha$ (என்க)

$$\therefore\ 3\alpha+\gamma=7 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$
$$2\alpha^2\gamma=-36 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$
$$2\alpha^2+2\alpha\gamma+\gamma\alpha=0$$

அதாவது, $2\alpha^2+3\alpha\gamma=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

(1), (3) இலிருந்து,

$$2\alpha^2+3\alpha(7-3\alpha)=0$$

அதாவது, $\alpha=0$, $\alpha=3$

$$\therefore\ \gamma=7,\ \gamma=1$$

ஆனால், $\alpha=0$, $\gamma=7$ (2) ஐ நிறைவு செய்யவில்லை. ஆதலால், $\alpha=3$, $\gamma=1$ என்ற மதிப்புகளை மட்டுமே கொள்ள வேண்டும். $\therefore\ \beta=6$.

$\therefore$ சமன்பாட்டின் மூலங்கள் 1, 3, 6.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$-ன் மூலங்கள் $\beta+\gamma=\alpha+\delta$ என்ற தொடர்பில் அமைந்திருப்பின் அதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ சமன்பாட்டின் மூலங்களெனில்,

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-p \quad \dots \quad (1)$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\delta=q \quad \dots \quad (2)$$

$$\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\alpha\gamma\delta+\alpha\beta\delta=-r \quad \dots \quad (3)$$

$$\alpha\beta\gamma\delta=s \quad \dots \quad (4)$$

மேலும், $$\beta+\gamma=\alpha+\delta \quad \dots \quad (5)$$

(1), (5)-இவற்றிலிருந்து

$$\beta+\gamma=\alpha+\delta=-\frac{p}{2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

(3) இலிருந்து $(\alpha+\delta)\,\beta\gamma+(\beta+\gamma)\,\alpha\delta=-r$

அதாவது $(\beta+\gamma)\,(\beta\gamma+\alpha\delta)=-r$

$$\therefore \quad \beta\gamma+\alpha\delta=\frac{2r}{p} \quad \dots \quad (7)$$

(2) இலிருந்து,

$$(\beta+\gamma)(\alpha+\delta)+\alpha\delta+\beta\gamma=q$$

அதாவது, $\left(-\frac{p}{2}\right)\left(-\frac{p}{2}\right)+\frac{2r}{p}=q$

[(6), (7)-இவற்றிலிருந்து]

$$\therefore \quad \frac{p^2}{4}+\frac{2r}{p}=q$$

அல்லது $p^3-4pq+8r=0$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$x^3-px^2+qx-r=0$-ன் மூலங்கள்

(i) கூட்டுத் தொடரில் அமைய,

(ii) பெருக்குத் தொடரில் அமைய,

(iii) இசைத் தொடரில் அமைய, நிபந்தனைகள் என்ன ?

(i) சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $a-d,\ a,\ a+d$ என இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad a-d+a+a+d=3a=p \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$(a-d)\,a + a\,(a+d) \;+ a^2-d^2 = q$$

அதாவது, $3a^2-d^2 = q$ ... ... (2)

$a\,(a^2-d^2) = r$ ... ... (3)

(1), (3) இலிருந்து $a^2-d^2 = \dfrac{3r}{p}$ ... ... (4)

(2) இலிருந்து (4) ஐக் கழிக்க,

$$2a^2 = q - \frac{3r}{p}$$

அதாவது $2 \cdot \left(\dfrac{p}{3}\right)^2 = q - \dfrac{3r}{p}$

$$\therefore\; 2p^3 = 9pq - 27r$$

அல்லது $2p^3-9pq+27r=0$

(ii) $\dfrac{a}{r_1}$, a, ar_1 -இவை சமன்பாட்டின் மூலங்களெனக் கொள்க.

$\therefore\; \dfrac{a}{r_1} + a + ar_1 = p$, அதாவது $\dfrac{a(1+r_1+r_1{}^2)}{r_1} = p$ ... (1

$\dfrac{a^2}{r_1} + a^2 r_1 + a^2 = q$, அதாவது $\dfrac{a^2(1+r_1+r_1{}^2)}{r_1} = q$ ... (2)

$a^3 = r$ ... ... (3)

(2) ஐ (1) ஆல் வகுக்க $a = \dfrac{q}{p}$

$\therefore$ (3) இலிருந்து $\left(\dfrac{q}{p}\right)^3 = r$

$\therefore\; q^3 = p^3 r.$

(iii) $\dfrac{1}{a-d}$, $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{a+d}$ மூலங்களென இருக்கட்டும்,

$$\therefore \quad \frac{1}{a-d} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} = p$$

$$\frac{1}{a(a-d)} + \frac{1}{a(a+d)} + \frac{1}{a^2-d^2} = q$$

$$\frac{1}{a(a^2-d^2)} = r.$$

$$\therefore \quad a(a^2-d^2) = \frac{1}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{3a}{a(a^2-d^2)} = q \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$\frac{3a^2-d^2}{a(a^2-d^2)} = p \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(1), (3) இலிருந்து $(3a^2-d^2)r = p$

$$\therefore \quad 3a^2-d^2 = \frac{p}{r}$$

$$a^2-d^2 = \frac{3}{q}$$

$$\therefore \quad 2a^2 = \left(\frac{p}{r} - \frac{3}{q}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 4)$$

ஆனால் (1), (2) இலிருந்து,

$$3a = q(a^2-d^2)\,a$$

$$= q \cdot \frac{1}{r} = \frac{q}{r}$$

$\therefore$ (4)-ல் a-ன் மதிப்பைப் பிரதியிட,

$$2\left(\frac{q}{3r}\right)^2 = \left(\frac{pq-3r}{qr}\right)$$

$$\therefore \quad 2q^3r = (9pqr-27r^2)\,r$$

$$\boxed{2q^3 - 9pqr + 27r^2 = 0}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$-ன் மூலங்கள்

(i) கூட்டுத்தொடரில் அமைய,

(ii) பெருக்குத் தொடரில் அமைய,

(iii) எல்லாம் சமமாயிருக்க,

(iv) மூன்று சமமாயிருக்க,

(v) இரண்டிரண்டாகச் சமமாயிருக்க,

(vi) இரண்டு சமமாயும் மாற்றுக் குறியையும் பெற்றிருக்க, நிபந்தனைகள் என்ன ?

(i) மூலங்களை $a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore\ a-3d+a-d+a+d+a+3d$$
$$=4a=-p \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

$$(a-3d)(a-d)+(a-3d)(a+d)+(a-3d)(a+3d)$$
$$+(a-d)(a+d)+(a-d)(a+3d)$$
$$+(a+d)(a+3d)=q$$

அதாவது, $6a^2-10d^2=q \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$

$$(a-3d)(a^2-d^2)+(a^2-d^2)(a+3d)+(a-d)(a^2-9d^2)$$
$$+(a+d)(a^2-9d^2)=-r$$

அதாவது $4a(a^2-5d^2)=-r \quad \dots \quad \dots \quad (3)$

$$(a^2-d^2)(a^2-9d^2)=s \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

(1) இலிருந்து $\qquad a=-\dfrac{p}{4}$

(1), (3)இலிருந்து $a^2-5d^2=+\dfrac{r}{p}$

$$6a^2-10d^2=q$$

$$\therefore \quad 4a^2 = q - \frac{2r}{p}$$

$$\therefore \quad 4\left(\frac{p^2}{16}\right) = \frac{pq-2r}{p}$$

$$\therefore \quad p^3 - 4pq + 8r = 0$$

(2), (4) இலிருந்து

$$\left(a^2 - \frac{6a^2-q}{10}\right)\left(a^2 - 9.\frac{6a^2-q}{10}\right) = s$$

அதாவது $(4a^2+q)(9q-44a^2) = 100\,s.$

$$ie., \quad \left[4.\frac{p^2}{16}+q\right]\left[9q-44.\frac{p^2}{16}\right] = 100\,s$$

$$\left.\begin{array}{l}(p^2+4q)(36q-11p^2) = 1600s \\ p^3-4pq+8r = 0\end{array}\right\}$$

இவையே தேவையான நிபந்தனைகள் ஆகும்.

(ii) $\frac{a}{d^3}$, $\frac{a}{d}$, ad, ad^3-இவற்றை மூலங்களாகக் கொள்க.

$$\therefore \quad a\left(\frac{1}{d^3}+\frac{1}{d}+d+d^3\right) = -p \quad \ldots \quad - \quad (1)$$

$$a^2\left(\frac{1}{d^4}+1+d^4+1+\frac{1}{d^2}+d^2\right) = q \quad \ldots \quad (2)$$

$$a^3\left(\frac{1}{d^3}+\frac{1}{d}+d^3+d\right) = -r \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$a^4 = s \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(3) ÷ (1) எடுக்க,

$$a^2 = \frac{r}{p}$$

$\therefore$ (4)-ல் இதைப் பிரதியிட $\frac{r^2}{p^2} = s$

$\therefore$ $r^2 = p^2s$ - இது ஒரு நிபந்தனை.

(1), (2), (3) இலிருந்து a, d ஐ நீக்குவதன் மூலம் மற்ற நிபந்தனையைக் காணலாம்.

இதற்கு $d + \frac{1}{d} = t$ எனப் பிரதியிடுவோம்.

$$\therefore \quad d^2 + \frac{1}{d^2} = t^2 - 2$$

$$d^3 + \frac{1}{d^3} = t^3 - 3t$$

$$d^4 + \frac{1}{d^4} = t^4 - 4t^2 + 2.$$

$$\therefore \quad (t^3 - 3t + t) = -\frac{p}{a}$$

$$t^3 - 2t + \frac{p}{a} = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

$$(t^4 - 4t^2 + 2 + t^2 - 2 + 2) = \frac{q}{a^2}$$

$$t^4 - 3t^2 + 2 = \frac{pq}{r} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

(5), (6) இலிருந்து

$$\begin{cases} (t^4 - 2t^2 + \frac{p}{a} t = 0 \\ t^2 + \left(\frac{pq}{r} - 2\right) + \frac{pt}{a} = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (7) \end{cases}$$

மறுபடியும் (5), (7) இலிருந்து

$$-\frac{p}{a} + \frac{p}{a} t^2 + \frac{pq}{r} t = 0$$

அதாவது, $\frac{t^2}{a} + \frac{qt}{r} - \frac{1}{a} = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (8)$

(7), (8) இலிருந்து,

$$\frac{t^2}{-\frac{p}{a^2} + \frac{2q}{r} - \frac{pq^2}{r^2}} = \frac{t}{-\frac{2}{a} + \frac{pq}{ra} + \frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{q}{r} - \frac{p}{a^2}}$$

$$\therefore \left[\frac{1}{a}\left(\frac{pq}{r}-1\right)\right]^2 = \left(\frac{q}{r}-\frac{p}{a^2}\right)\left(\frac{2q}{r}-\frac{pq^2}{r^2}-\frac{p}{a^2}\right)$$

அதாவது $\frac{1}{a^2 r^2}(pq-r)^2 = \left(\frac{q}{r}-\frac{p^2}{r}\right)\left(\frac{2q}{r}-\frac{pq^2}{r^2}-\frac{p^2}{r}\right)$

$$\frac{p}{r^3}(pq-r)^2 = \frac{1}{r^3}(q-p^2)(2qr-pq^2-p^2r)$$

$$\left(\because \frac{1}{a^2}=\frac{p}{r}\right)$$

$$p(pq-r)^2 =$$

$$= (p^2-q)(pq^2+p^2r-2qr)$$

$$= r(p^2-q)^2 + (pq^2-qr)(p^2-q)$$

$$= r(p^2-q)^2 + q(pq-r)(p^2-q)$$

$$\therefore r(p^2-q)^2 = (pq-r)[p^2q-pr-q(p^2+q)]$$

$$= (pq-r)(q^2-pr)$$

$$r(p^2-q)^2 = (pq-r)(q^2-pr)$$

இது இரண்டாவது நிபந்தனை.

(iii) நான்கு மூலங்களும் α என இருக்கட்டும்

$\therefore 4\alpha = -p$ ... ... (1)

$6\alpha^2 = q$ ... ... (2)

$4\alpha^3 = -r$ ... ... (3)

$\alpha^4 = s$ ... ... (4)

(1), (2) இலிருந்து $\frac{p^2}{16} = \frac{q}{6}$ அதாவது $8q = 3p^2$ ... (I)

(1), (3) இலிருந்து $-\frac{p^3}{16} = -r \quad \therefore p^3 = 16r$ ... (II)

(1), (4) இலிருந்து $\frac{p^4}{256} = s \quad \therefore p^4 = 256s$ .. (III)

(iv) இங்கு மூலங்கள் $\alpha, \alpha, \alpha, \beta$ என இருக்கட்டும்.

$$3\alpha+\beta=-p \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$3\alpha^2+3\alpha\beta=q \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$\alpha^3+3\alpha^2\beta=-r \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$\alpha^3\beta=s \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$\beta = -p - 3\alpha$ என (2), (3)-ல் பிரதியிட,

$$3\alpha^2 - 3p\alpha - 9\alpha^2 = q$$

அதாவது $6\alpha^2 + 3p\alpha + q = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$

$$\alpha^3 - 3p\alpha^2 - 9\alpha^3 = -r$$

அதாவது $8\alpha^3 + 3p\alpha^2 - r = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$

(5), (6) இலிருந்து,

$$\frac{\alpha^2}{qpr-4q^2} = \frac{\alpha}{3pq-18r} = \frac{1}{24q-9p^2}$$

$$\therefore \quad 3(pq-6r)^2 = (9pr-4q^2)(8q-3p^2) \ldots \quad \ldots \quad (I)$$

இது முதல் நிபந்தனை.

அடுத்து,

$\alpha^3\beta = s$ என்பதில் $\beta = -p - 3\alpha$ எனப் பிரதியிட,

$$3\alpha^4 + p\alpha^3 + s = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8)$$

$$8\alpha^3 + 3p\alpha^2 - r = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்தும் கிடைப்பது

$$p\alpha^3 - 3\alpha r - 8s = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9)$$

மறுபடியும் (5), (9) இலிருந்து

$$3p^2\alpha^2 + (pq + 18r)\alpha + 48s = 0 \quad \ldots \quad (10)$$

$$6\alpha^2 + 3pr + q = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்தும்,

$$\frac{\alpha^2}{q(pq+18r)-144prs} = \frac{\alpha}{288s-3p^2q} = \frac{1}{9p^3r-6(qq+18r)}$$

$$\therefore \quad 3(96s-p^2q)^2 = (pq^2+18qr-144prs)(3p^3r-2pq-36r) \quad (II)$$

இது இரண்டாவது நிபந்தனையாகும்.

(v) சமன்பாட்டின் மூலங்களை $\alpha, \alpha; \ \beta, \beta$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad 2(\alpha+\beta) = -p \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta = q \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$2(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2) = -r \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\alpha^2\beta^2 = s \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

(3) இலிருந்து,

$$2\alpha\beta(\alpha+\beta) = -r$$

அதாவது $\quad \alpha\beta = \dfrac{r}{p} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (5)$

(2) இலிருந்து,

$$(\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta = q$$

அதாவது, $\quad \dfrac{p^2}{4} + \dfrac{2r}{p} = q$

$$\therefore \quad p^3 + 8r = 4pq \quad \dots \quad \dots \quad (I)$$

(4), (5) இலிருந்து,

$$\frac{r^2}{p^2} = s$$

$$r^2 = sp^2 \quad \dots \quad \dots \quad (II)$$

I, II இவை தேவையான நிபந்தனைகளாகும்.

(vi) இங்குச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை $\alpha, -\alpha, \ \beta, \ \gamma$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \beta+\gamma = -p \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$-\alpha_1+\beta\gamma = q \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$-\alpha^2\beta - \alpha^2\gamma = -r \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$-\alpha^2\beta\gamma = s \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

(1), (3) இலிருந்து,

$$\alpha^2(-p) = r$$

$$\therefore \alpha^2 = -\frac{r}{p} \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

இதை (4)-ல் பிரதியிட,

$$\beta\gamma = \frac{ps}{r} \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

(5), (6)-இவற்றை (2)-ல் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$$\frac{r}{p} + \frac{ps}{r} = q$$

$$\therefore r^2 + p^2s = pqr \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (I)$$

பயிற்சி 2 (c)

1. $x^3-5x^2-16x+80=0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரு தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமானால், தீர்வுகள் காண்க.

2. $x^3-3x^2+4=0$ என்ற சமன்பாட்டில் இரண்டு தீர்வுகள் சமமானால் தீர்வுகளைக் காண்க.

3. $x^3-9x^2+14x+24=0$ என்ற சமன்பாட்டில் இரு தீர்வுகளுக்கு உள்ள விகிதம் 3 : 2 எனின் தீர்வுகள் காண்க.

4. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பவை $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளானால், $\beta+\gamma=\alpha+\delta$ என்றால் $p^3-4pq+8r=0$ எனக் காட்டுக.

5. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பவை $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள். $\alpha\beta=\gamma\delta$ ஆனால் $p^2s-r^2=0$ என நிறுவுக.

6. $x^3+qx+r=0$ என்ற சமன்பாட்டில் ஒரு தீர்வு மற்றொரு தீர்வைப்போல் இரு மடங்காயின், $343r^2+36q^3=0$ என்று காட்டு.

7. $x^4-5x^3+11x^2-13x+6=0$ என்ற சமன்பாட்டில் $2\beta+3\alpha=7$ என்றால் அச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காண்க.

8. $x^4-2x^3+4x^2+6x-21=0$ என்ற சமன்பாட்டில் இரு தீர்வுகள் அளவில் சமமாயும், குறியில் மாறுபட்டும் இருப்பின் தீர்வுகள் காண்க.

9. $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$-ன் இரண்டு தீர்வுகள் சமமானால், அவைகள் ஒவ்வொன்றும் $\frac{1}{2}\,\frac{bc-ad}{ac-b^2}$-க்குச் சமமாகும்.

10. $x^3+px^2+qx+r=0$-ன் இரண்டு தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகை மூன்றாவது தீர்வுக்குச் சமமானால், $r(1-p)^2+(q-r)^2=0$ என்று காட்டு.

11. $x^4-8x^3+14x^2+8x-15=0$-ன் இரண்டு தீர்வுகளின் கூட்டுத்தொகை மற்ற இரண்டு தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமானால், தீர்வுகளைக் காண்க.

12. $x^3+ax+b=0$-ன் ஒரு தீர்வு மற்ற இரண்டு தீர்வுகளின் வித்தியாசத்தைப்போல் இரு மடங்காகின், ஒரு தீர்வு $\frac{13b}{3a}$ எனக் காட்டு.

13. $2x^4-15x^3-25x^2+124x+96=0$-ன் இரண்டு தீர்வுகளின் வித்தியாசம் 5 என்றால், தீர்வுகளைக் காண்க.

14. $x^4-2x^3-3x^2+4x-1=0$-ல் இரண்டு தீர்வுகளின் பெருக்குத்தொகை '1' ஆனால் தீர்வுகளைக் காண்க.

15. $x^4+4ax^3+6bx^2+c=0$-ன் மூன்று தீர்வுகள் சமமாக இருப்பின், $3a^2=4b$, $27a^4+16c=0$ என்று நிறுவுக.

16. $6x^3-11x^2-3x+2=0$-ன் தீர்வுகள் இசைத் தொடரில் இருப்பின், தீர்வுகளைக் காண்க.

17. $x^3+3ax^2+3bx+c=0$-ன் தீர்வுகள் இசைத் தொடரின் இருக்குமானால், $2b^3=c(3ab-c)$ என்று நிறுவுக.

18. $x^3-6x^2+kx+64=0$-ன் தீர்வுகள் பெருக்குத் தொடரில் இருக்குமானால், k-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடித்து, தீர்வுகளைக் காண்க.

19. $32x^3 - 48x^2 + 22x - 3 = 0$-ன் தீர்வுகள் கூட்டுத் தொடரில் இருந்தால், தீர்வுகளைக் காண்க.

20. $x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40 = 0$-ன் தீர்வுகள் கூட்டுத் தொடரில் இருக்குமானால், தீர்வுகளைக் காண்க.

21. $27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0$-ன் தீர்வுகள் பெருக்குத் தொடரில் இருக்குமாகில், தீர்வுகளைக் காண்க.

22. $3x^4 - 40x^3 + 130x^2 - 120x + 27 = 0$-ன் தீர்வுகள் பெருக்குத் தொடரில் இருக்குமானால், தீர்வுகளைக் காண்க.

2.11. சமன்பாட்டின் மூலங்களாலான சமச்சீர் சார்புகள் (Symmetric functions of the roots)

மூலங்களாலான சமச்சீர் சார்பென்பது, தீர்வுகள் அனைத்தையும் கொண்டதாயும், அவற்றில் சமச்சீர் உடையதாயும் அமைந்த சார்பினைக் குறிக்கும்.

(உ-ம்.) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ஒரு சமன்பாட்டின் தீர்வுகளெனக் கொள்வோம்.

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$, $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{\delta}$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\delta$ என்பவை $\alpha, \beta, \gamma, \delta$-ல் அமைந்த சில சமச்சீர் சார்புகள்.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ என்பவை $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$-ன் மூலங்கள் எனில்,

$$\Sigma\,\alpha_1 = -p_1$$

$$\Sigma\,\alpha_1\alpha_2 = p_2$$

$$\Sigma\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -p_3$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = (-1)^n p_n.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$-ல் அமைந்த எந்தச் சமச்சீர் சார்பையும், $p_1, p_2, \dots, p_n$ மூலமாக எழுதலாம்.

(i) $\Sigma \alpha_1 = -p_1$

(ii) $\Sigma \alpha_1^2 = (\Sigma \alpha_1)^2 - 2\Sigma \alpha_1\alpha_2$

$= p_1^2 - 2p_2$

(iii) $\Sigma \alpha_1^2\alpha_2$

$\Sigma \alpha_1^2 \alpha_2$ காண்பதற்கு $(\Sigma \alpha_1 \Sigma \alpha_1\alpha_2)$-ன் மதிப்பை எடுத்துக் கொள்வோம். இதன் விரிவில் இருவிதமான உறுப்புகள் இருக்கும். $\alpha_1^2\alpha_2$ என்பது போன்ற உறுப்புகள்; $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ என்பது போன்ற உறுப்புகள். முதல் வகையில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் ஒரு தடவை மட்டும் வரும். ஆனால் இரண்டாவது வகையை எடுத்துக்கொண்டால், சான்ருக $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ என்ற உறுப்பு $\Sigma \alpha_1$-ல் உள்ள α_1, $\Sigma \alpha_1 \alpha_2$-ல் உள்ள $\alpha_2 \alpha_3$-ன் பெருக்குத் தொகையாகவும், இதேபோன்று $\Sigma \alpha_1$-ல் உள்ள α_2, $\Sigma \alpha_1 \alpha_2$-ல் உள்ள $\alpha_1 \alpha_3$-ன் பெருக்குத் தொகையாகவும், $\Sigma \alpha_1$-ல் உள்ள α_3, $\Sigma \alpha_1 \alpha_2$-ல் உள்ள $\alpha_1 \alpha_2$-ன் பெருக்குத் தொகையாகவும், இவ்வாறு மூன்று தடவை வருகிறது. எனவே இரண்டாவது வகையிலமைந்த உறுப்பு ஒவ்வொன்றும் மூன்று முறை வருகிறது.

$$\therefore \quad \Sigma \alpha_1 \Sigma \alpha_1\alpha_2 = \Sigma \alpha_1^2\alpha_2 + 3\Sigma \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

$$\begin{aligned}\Sigma \alpha_1^2\alpha_2 &= (\Sigma \alpha_1)(\Sigma \alpha_1\alpha_2) - 3\Sigma \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ &= (-p_1)p_2 - 3(-p_3) \\ &= 3p_3 - p_1p_2\end{aligned}$$

பொதுவாக $\Sigma \alpha_1^2\alpha_2 \dots \alpha_r = (\Sigma\alpha_1)(\Sigma\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_r)$

$$- (r+1)\Sigma\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_r\alpha_{r+1}$$

$$= (-p_1)(-1)^r p_r - (r+1)(-1)^{r+1} p_{r+1}$$

(iv) $\Sigma\alpha_1^3$-இதற்கு $(\Sigma \alpha_1)(\Sigma\alpha_1^2)$ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். இதன் விரிவில் α_1^3 என்பது போன்ற உறுப்புகளும் $\alpha_2 \alpha_1^2$ என்பது போன்ற உறுப்புகளும் இருக்கும். முதல் வகையில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் ஒரே ஒரு முறையும், இரண்டாவது வகையில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் ஒரே ஒரு வகையும்தான் வரும்.

$$\begin{aligned}\therefore \quad \Sigma\alpha_1^3 &= (\Sigma\alpha_1)(\Sigma\alpha_1^2) - \Sigma\alpha_1^2\alpha_2 \\ &= (-p_1)(p_1^2 - 2p_2) - (3p_3 - p_1p_2) \\ &= 3p_1p_2 - p_1^3 - 3p_3\end{aligned}$$

இதே முறையில் மூலங்கள் அமைந்த சமச்சீர் சார்புகள் எல்லாவற்றிற்கும் மதிப்புகளைக் கெழுக்கள் மூலம் கண்டுபிடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ என்பவை $\sum_{r=0}^{n} p_{n-r} \quad x^r = 0$ என்ற சமன் பாட்டின் மூலங்களெனில் $\Sigma \alpha_r^4$, $\Sigma \alpha_1^2 \quad \alpha_2^2$-ன் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக. (செ.ப.க.)

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$-இவை $p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n = 0$

$$\therefore \ \Sigma \alpha_r = -\frac{p_1}{p_0} \quad \Sigma \alpha_r \alpha_s = \frac{p_2}{p_0}$$

$$\Sigma \alpha_r^2 = (\Sigma \alpha_r)^2 - 2 \Sigma \alpha_r \alpha_s = \frac{p_1^2}{p_0^2} - \frac{2p_2}{p_0} = \frac{p_1^2 - 2p_0 p_2}{p_0^2}$$

$$\Sigma \alpha_r^2 \alpha_s^2 = (\Sigma \alpha_r \alpha_s)^2 - 2\Sigma \alpha_r^2 \alpha_s \alpha_t - 6\Sigma \alpha_r \alpha_s \alpha_t \alpha_u$$

ஆனால், $\Sigma \alpha_r^2 \alpha_s \alpha_t = (\Sigma \alpha_r)(\Sigma \alpha_r \alpha_s \alpha_t) - 4\Sigma \alpha_r \alpha_s \alpha_t \alpha_u$

$$= \left(-\frac{p_1}{p_0}\right)\left(-\frac{p_3}{p_0}\right) - \frac{4p_4}{p_0} = \frac{p_1 p_3 - 4p_0 p_4}{p_0^2}$$

எனவே $\Sigma \alpha_r^2 \alpha_s^2 = \frac{p_2^2}{p_0^2} - 2\frac{(p_1 p_3 - 4p_0 p_4)}{p_0^2} - 6\frac{p_4}{p_0}$

$$= \frac{p_2^2 - 2p_1 p_3 + 2p_0 p_4}{p_0^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

மேலும் $\Sigma \alpha_r^4 = (\Sigma \alpha_r^2)^2 - 2\Sigma \alpha_r^2 \alpha_s^2$

$$\Sigma \alpha_r^4 = \frac{(p_1^2 - 2p_0 p_2)^2}{p_0^4} - 2\frac{p_2^2 - 2p_0 p_3 + 2p_0 p_4}{p_0^2}$$

$$= \frac{1}{p_0^4}\left[p_1^4 - 4p_0 p_1^2 p_2 + 2p_0^2 p_2^2 + 4p_0^2 p_1 p_3 - 4p_0^3 p_4\right] \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

α, β, γ என்பவை $x^3 - 5x + 7 = 0$-ன் மூலங்களாகும். $\Sigma \frac{\alpha^2 - \beta\gamma}{\beta + \gamma}$ -ன் மதிப்புக் காண்க.

$$\frac{\alpha^2-\beta\gamma}{\beta+\gamma} = \frac{\alpha^2-\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha}}{\alpha+\beta+\gamma-\alpha} = \frac{\alpha^2+\frac{7}{\alpha}}{0-\alpha}$$

$[\because \ \Sigma\alpha = 0, \ \ \alpha\beta\gamma = -7]$

$$= \frac{\alpha^3+7}{-\alpha^2} = \frac{5\alpha}{-\alpha^2} = -\frac{5}{\alpha}$$

[ஏனெனில் $\alpha^3 - 5\alpha + 7 = 0$]

$$\frac{\alpha^2-\beta\gamma}{\beta+\gamma} = -\frac{5}{\alpha}$$

$$\therefore \ \sum\frac{\alpha^2-\beta\gamma}{\beta+\gamma} = -5\,\Sigma\frac{1}{\alpha}$$

$$= -5\left[\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\right]$$

$$= \frac{-5(-5)}{-7} = -\frac{25}{7}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$p+q+r = 3$; $p^2+q^2+r^2 = 5$; $p^3+q^3+r^3 = 7$; எனில் p, q, r ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட முப்படிச் சமன்பாடு காண்க. $p^4+q^4+r^4 = 9$ என நிறுவுக. (செ.ப.க).

p, q, r ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு

$$(x-p)(x-q)(x-r) = 0$$

அதாவது, $x^3-(p+q+r)\,x^2 + (pq+qr+rp)\,x - pqr = 0$

$$p+q+r = 3$$

$$p^2+q^2+r^2 = 5$$

$$p^3+q^3+r^3 = 7$$

$$\therefore \ (p+q+r)^2-(p^2+q^2+r^2) = 2\,(pq+qr+rp)$$

$$= 9-5 = 4$$

$$\therefore \ pq+qr+rp = 2.$$

$$(p+q+r)(p^2+q^2+r^2) = p^3+q^3+r^3 + \Sigma p^2q$$

மேலும் $(p+q+r)(pq+qr+rp) = \Sigma p^2q + 3pqr$

$\therefore\ 15 = 7 + \Sigma p^2q$

$\Sigma p^2q = 8$

$\therefore\ 3pqr = 3\cdot 2 - 8 = -2$

$\therefore$ கேட்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^3 - 3x^2 + 2x + \frac{2}{3} = 0.$$

மேலும் $(\Sigma pq)^2 = \Sigma p^2q^2 + 2pqr\,(p+q+r)$

$$4 = \Sigma p^2q^2 - \frac{4}{3}.3$$

$$\therefore\ \Sigma p^2q^2 = 8$$

$$p^4+q^4+r^4 = (\Sigma p^2)^2 - 2\Sigma p^2q^2 = 25 - 16 = 9$$

2.12 சமன்பாட்டின் மூலங்களின் படிகளின் கூட்டுத்தொகை காணுதல் (Sum of the powers of the roots of an equation)

$f(x) = 0$ என்ற n-படிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ எனக் கொண்டால் இவற்றை 'r' படிக்கு உயர்த்தி, அவற்றின் கூடுதலை, அதாவது $\alpha_1{}^r + \alpha_2{}^r + \ldots + \alpha_n{}^r$ ஐ S_r எனக் குறிப்பிடுவோம். S_r, சமன்பாட்டின் மூலங்களாலான சமச்சீர்க் கோவை. எனவே S_r-ன் மதிப்பை இதற்கு முன் குறித்த விளக்கத்தின்படி காணலாம். ஆனால் $r > 4$ என வரும்போது இம்முறை சற்றுக் கடினமாக அமையும். ஆதலால், r-ன் பெரிய மதிப்புகளுக்கு S_r-ன் மதிப்பைப் பின்வரும் இரு தேற்றங்களுள் ஒன்றால் பெறலாம்.

தேற்றம் 9 :

$f(x)$-ன் 'r'படி கொண்ட தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகையான S_r-ன் மதிப்பு $\dfrac{x f'(x)}{f(x)}$-ன் விரிவில் x^{-r}-ன் கெழுவிற்குச் சமமாகும்.

தெரிப்பு : $f(x) = 0$-ன் மூலங்கள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ஆதலால், $f(x) = K(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)$, K ஒரு மாறிலி.

இருபுறமும் மடக்கை (இலாகிருதம்) எடுத்து x ஐப் பொறுத்த வகைக் கெழு கண்டால்,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \frac{1}{x-\alpha_3} + \dots + \frac{1}{x-\alpha_n}$$

$$\therefore \quad \frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x-\alpha_1} + \frac{x}{x-\alpha_2} + \frac{x}{x-\alpha_3} + \dots + \frac{x}{x-\alpha_n}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{\alpha_1}{x}} + \frac{1}{\left(1-\frac{\alpha_2}{x}\right)} + \frac{1}{\left(1-\frac{\alpha_3}{x}\right)} + \dots + \frac{1}{\left(1-\frac{\alpha_n}{x}\right)}$$

$$= \left(1-\frac{\alpha_1}{x}\right)^{-1} + \left(1-\frac{\alpha_2}{x}\right)^{-1} + \dots + \left(1-\frac{\alpha_n}{x}\right)^{-1}$$

$$= 1 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_1^2}{x^2} + \dots + \frac{\alpha_1^n}{x^n} + \dots \dots$$

$$+ 1 + \frac{\alpha_2}{x} + \frac{\alpha_2^2}{x^2} + \dots + \frac{\alpha_2^n}{x^n} + \dots \dots$$

$$+ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$+ 1 + \frac{\alpha_n}{x} + \frac{\alpha_n^2}{x^2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{x^n} + \dots\dots$$

$$= n + (\Sigma\,\alpha_1)\frac{1}{x} + (\Sigma\,\alpha_1^2)\frac{1}{x^2} + (\Sigma\,\alpha_1^3)\frac{1}{x^3} + \dots + (\Sigma\,\alpha_1^r)\frac{1}{x^r} + \dots \dots$$

$$= n + S_1\frac{1}{x} + S_2\frac{1}{x^2} + \dots + S_r\frac{1}{x^r} + \dots\dots$$

$\therefore \quad S_r = \dfrac{xf'(x)}{f(x)}$-ன் விரிவில் x^{-r}-ன் கெழு ஆகும்.

2·13. நியூட்டன் தேற்றம் 10 :

$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$, $f(x) \equiv x^n+p_1x^{n-1}+\dots+p_{n-1}x+p_n=0$-ன் மூலங்களாகவும், $S_r = \alpha_1^r + \alpha_2^r + \dots + \alpha_n^r$ எனவும் இருந்தால்,

(i) $r < n$ என இருக்கும்போது

$$S_r + p_1 S_{r-1} + p_2 S_{r-2} + \dots \dots + rp_r = 0$$

(ii) $r > n$ என இருக்கும்போது

$$S_r + p_1 S_{r-1} + p_2 S_{r-2} + \dots \dots + p_n S_{r-n} = 0.$$

தெரிப்பு : $f(x) \equiv k(x-\alpha_1)\ (x-\alpha_2) \dots (x-\alpha_n)$ எனக் கொள்ளலாம். இதில் $x = \dfrac{1}{y}$ எனப் பிரதியிட்டு இரு புறமும் y^nஆல் பெருக்க,

$$y^n f\left(\frac{1}{y}\right) = y^n\, k\left(\frac{1}{y}-\alpha_1\right)\left(\frac{1}{y}-\alpha_2\right)\cdots\left(\frac{1}{y}-\alpha_n\right)$$

$$= k(1-\alpha_1 y)(1-\alpha_2 y)\dots(1-\alpha_n y)$$

ஆனால் $$y^n f\left(\frac{1}{y}\right) = y^n\left[\frac{1}{y^n} + p_1\frac{1}{y^{n-1}} + p_2\frac{1}{y^{n-2}} + \dots + \frac{p_{n-1}}{y} + p_n\right]$$

$$= [1 + p_1 y + p_2 y^2 + \dots + p_n y^n]$$

$$\therefore\ 1 + p_1 y + p_2 y^2 + \dots + p_n y^n = k(1-\alpha_1 y)(1-\alpha_2 y)\dots(1-\alpha_n y)$$

இருபுறமும் மடக்கை எடுத்து y ஐப் பொறுத்த வகைக் கெழு கண்டால்,

$$\frac{p_1+2p_2y+3p_3y^2+\dots+np_ny^{n-1}}{1+p_1y+p_2y^2+\dots+p_ny^n} \equiv \frac{-\alpha_1}{1-\alpha_1 y} - \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2 y} - \dots - \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n y}$$

$$\equiv -\Sigma\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1 y}$$

$$\equiv -\Sigma(\alpha_1 + \alpha_1^2 y + \alpha_1^3 y^2 + \dots \dots \infty \text{ வரை})$$

$$\equiv -[(\Sigma\alpha_1) + (\Sigma\alpha_1^2)y + (\Sigma\alpha_1^3)y^2 + \ldots + (\Sigma\alpha_1^r)y^r + \ldots \infty \text{ வரை}]$$

$$\equiv -S_1 - S_2 y - S_3 y^2 - \ldots - S_r y^r - \ldots \infty \text{ வரை}$$

$$\therefore \ (p_1 + 2p_2 y + 3p_3 y^2 + \ldots + np_n y^{n-1})$$
$$\equiv (1 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots + p_n y^n)(-S_1 - S_2 y - S_3 y^2 - \ldots \infty \text{ வரை})$$

இருபுறமும் மாறிலி எண்ணையும் y-ன் சமப் படிகளின் கெழுக்களையும் ஒப்பிட்டால்,

$$p_1 = -S_1 \qquad \therefore\ p_1 + S_1 = 0$$

$$2p_2 = -p_1 S_1 - S_2 \qquad \therefore\ S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 = 0$$

$$3p_3 = -p_2 S_1 - p_1 S_2 - S_3 \ \therefore\ S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1 - 3p_3 = 0$$

பொதுவாக $r < n$ எனில்,

$$S_r + p_1 S_{r-1} + p_2 S_{r-2} + \ldots + rp_r = 0$$

$r \geqslant n$ எனில்,

$S_r + p_1 S_{r-1} + p_2 S_{r-2} + \ldots + p_n S_{r-n} = 0$ எனவும் பெறப்படும். இவ்வாறு நிறுவியுள்ள சமன்பாடுகளிலிருந்து $S_1, S_2 \ldots S_r$ என்பவற்றின் மதிப்புகளைப் படிப்படியாகப் பெறலாம்.

கிளைத்தேற்றம்

$-r.\log(1+p_1y+p_2y^2 + \ldots + p_ny^n)$-ன் விரிவில் y^r-ன் கெழு S_r-ன் மதிப்பாகும்.

தெரிப்பு : நியூட்டனின் தேற்றத்தை நிறுவுகையில்

$$y^n f\left(\frac{1}{y}\right) = 1 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots + p^n y^n$$
$$= k(1-\alpha_1 y)(1-\alpha_2 y)\ldots(1-\alpha_n y)$$

எனக் கண்டோம். எனவே இரு புறமும் மடக்கை (இலாகிருதம்) எடுத்து மடக்கை (இலாகிருத)த் தொடர் விரிவைப் பயன்படுத்தினால்,

$$\log(1 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots + p_n y^n)$$
$$= \log k + \Sigma \log(1-\alpha_1 y)$$

$$= \log k + \Sigma - \left(\alpha_1 y + \frac{\alpha_1^2 y^2}{2} + \frac{\alpha_1^3 y^3}{3} + \dots + \frac{\alpha_1^r y^r}{r} + \dots \right)$$

$$= \log k - S_1 y - \frac{S_2 y^2}{2} - \frac{S_3 y^3}{3} - \dots - \frac{S_r y^r}{r} - \dots$$

இரு புறமும் y^r-ன் கெழுக்களை ஒப்பிட,

$$\frac{-S_r}{r} = \log(1 + p_1 y + p_2 y^2 + \dots + p_n y^n)\text{-ன் விரிவில்}$$

y^r-ன் கெழு.

$\therefore$ $S_r = -r\,[\log(1 + p_1 y + p_2 y^2 + \dots + p_n y^n)]$-ன் விரிவில் y^r-ன் கெழு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$-ன் மூலங்களின் நான்காவது படிகளின் கூடுதல் காண்க. (செ.ப.க.)

வழக்கமான குறியீட்டின்படி

$$p_1 = -10,\ p_2 = 35,\ p_3 = -50,\ p_4 = 24.$$

$\therefore$ $S_1 - 10 = 0$ $\qquad\therefore$ $S_1 = 10$

$S_2 - 10S_1 + 70 = 0$ $\qquad S_2 = 30$

$S_3 - 10S_2 + 35S_1 - 150 = 0$

$\therefore$ $S_3 = 300 - 350 + 150 = 100$

$S_4 + p_1 S_3 + p_2 S_2 + p_3 S_1 + p_4 = 0$

$S_4 - 1000 + 1050 - 500 + 24 = 0$

$S_4 = 426$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^3 + 3x + 9 = 0$-ன் மூலங்களின் 9 ஆவது படிகளின் கூடுதல் பூச்சியமாகும் என நிருபி. [செ.ப.க.]

α, β, γ என்பவை $x^3 + 3x + 9 = 0$-ன் மூலங்களெனில்

$$\alpha^9 + \beta^9 + \gamma^9 = -9 \log \left[y^3 \left(\frac{1}{y^3} + \frac{3}{y} + 9 \right) \right]\text{-ன்}$$

விரிவில் y^9-ன் கெழு

$$= -9 \times [\log(1+3y^2+9y^3)\text{-ன் விரிவில் } y^9\text{-ன் கெழு}]$$

$$\log(1+3y^2+9y^3) = 3y^2+9y^3 - \frac{1}{2}(3y^2+9y^3)^2 + \frac{1}{3}(3y^2+9y^3)^3 - \frac{1}{4}(3y^2+9y^3)^4 + \ldots$$

இதில் y^9-ன் கெழு $= \frac{1}{3}\cdot 9^3 - \frac{1}{4}(4\cdot 3^3\cdot 9) = 3\cdot 9^2 - 3\cdot 9^2 = 0$

$\therefore\ \alpha^9+\beta^9+\gamma^9 = 0.$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$a+b+c+d=0$ $\quad a^3+b^3+c^3+d^3=0$ எனில்

$2\Sigma a^6 - (\Sigma a^2)(\Sigma a^4) = 4abcd\,\Sigma ab$ என நிறுவுக. (செ.ப.க.)

a, b, c, d ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை $x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4=0$ என்க.

$\therefore\ s_1 = -p_1 = 0$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.)

$s_2+p_1s_1+2p_2=0 \qquad \therefore\ s_2=-2p_2$

$s_3+p_1s_2+p_2s_1+3p_3=0$ ஆனால் $S_3=0$ (கொள்கைப்படி)

$\therefore\ p_3=0.$

$\therefore\ s_4+p_1s_3+p_2s_2+p_3s_3+4p_4=0$ என்ற சமன்பாட்டில்

$s_4-2p_2^2+4p_4=0 \qquad \therefore\ s_4=2p_2^2-4p_4$

அடுத்து $s_5+p_1s_4+p_2s_3+p_3s_2+p_4s_1=0$

$\therefore\ s_5=0$

$s_6+p_1s_5+p_2s_4+p_3s_3+p_4s_2=0$

$s_6+p_2(2p_2^2-4p_4)-2p_2p_4=0.$

$s_6=-2p_2^3+6p_2p_4$

$s_2=-2p_2$

$s_4=2p_2^2-4p_4$

$$\therefore \quad s_2 s_4 = -4p_3^2 + 8p_2 p_4$$

$$2s_6 - s_2 s_4 = 12p_2 p_4 - 4p_3^2 + 4p_3^2 - 8p_2 p_4$$

$$= 4p_2 p_4$$

சமன்பாட்டிலிருந்து $\Sigma ab = p_2 \qquad abcd = p_4$

$$\therefore \quad 2s_6 - s_2 s_4 = 4abcd\,(\Sigma ab)$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$2x^4 - x + 3 = 0$-ன் மூலங்களின் 12 ஆவது படிகளின் கூடுதல் காண்க.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — இவை சமன்பாட்டின் மூலங்களாக இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad 2x^4 - x + 3 \equiv 2\,(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\,(x-\alpha_3)\,(x-\alpha_4)$$

முழுவதும் 2 ஆல் வகுத்து $x = \frac{1}{y}$ எனப் பிரதியிட்டு, பின் y^4 ஆல் பெருக்க,

$$1 - \frac{1}{2}y^3 + \frac{3}{2}y^4 = (1-\alpha_1 y)\,(1-\alpha_2 y)\,(1-\alpha_3 y)\,(1-\alpha_4 y)$$

$$\therefore \quad \log\left[1 - \frac{1}{2}y^3\,(1-3y)\right] = \log\,(1-\alpha_1 y) + \log\,(1-\alpha_2 y) + \log\,(1-\alpha_3 y) + \log\,(1-\alpha_4 y)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}y^3\,(1-3y) + \frac{1}{2}\,\frac{y^6\,(1-3y)^2}{2^2} + \frac{1}{3}\,\frac{y^9\,(1-3y)^3}{2^3} + \frac{1}{4}\,\frac{y^{12}\,(1-3y)^4}{2^4} + \ldots$$

$$= S_1 y + \frac{1}{2}S_2 y^2 + \frac{1}{3}S_3 y^3 + \ldots\ldots$$

y^{12}-ன் கெழுக்களைச் சமப்படுத்த,

$$\frac{1}{12}S_{12} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3}\,\frac{(-3)^3}{2^3} = \frac{1}{64} - \frac{9}{8} = -\frac{71}{64}$$

$$\therefore \quad S_{12} = -\frac{213}{16}.$$

பயிற்சி 2 (d)

1. α, β, γ என்பன $x^3-px^2+qx-r=0$-ன் தீர்வுகளாயின்
 (i) $\Sigma \alpha^2\beta^2$ (ii) $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$
 (iii) $\Sigma \alpha^2\beta$ (iv) $\Sigma\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)$-ன்
 மதிப்புகள் காண்க.

2. α, β, γ என்பன $x^3+px^2+qx+r=0$-ன் தீர்வுகளாயின்
 (i) $\Sigma \frac{1}{\alpha^2}$ (ii) $\Sigma \frac{1}{\alpha^2\beta^2}$ (iii) $\Sigma \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma}$
 (iv) $(\beta+\gamma-3\alpha)(\gamma+\alpha-3\beta)(\alpha+\beta-3\gamma)$
 (v) $\Sigma \alpha^3\beta^3$-ன் மதிப்புகள் காண்க.

3. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பன $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$-ன் தீர்வுகளாயின் (i) $\Sigma \alpha^2\beta\gamma$ (ii) $\Sigma \alpha^4$-ன் மதிப்புகள் காண்க.

4. α, β, γ என்பன $x^3+qx+r=0$-ன் தீர்வுகளானால்
 (i) $\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}+\frac{1}{\alpha+\beta}$
 (ii) $\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)$
 $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)$-ன் மதிப்புகள் காண்க.

5. $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$ என்ற சமன்பாட்டில் $(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2=18(a_1^2-a_0a_4)$ என நிறுவுக.

6. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$ என்பன $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\dots+p_n=0$-ன் தீர்வுகளாயின் $\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2=(n-1)p_1^2-2np_2$ என நிறுவுக.

7. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பன $x^4-4x^2-x+2=0$-ன் தீர்வுகளாயின் (i) $\Sigma \alpha^2\beta$ (ii) $\Sigma \frac{1}{\delta^2}$-ன் மதிப்புகள் காண்க.

8. α, β, γ என்பன $x^3+px^2+qx+r=0$-ன் தீர்வுகளாயின்

(i) $(\alpha+\beta), (\beta+\gamma), (\gamma+\alpha)$

(ii) $\alpha(\beta+\gamma)$, $\beta(\gamma+\alpha)$, $\gamma(\alpha+\beta)$ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

9. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ என்பன $a_0x^n+a_1x^{n-1}+ \ldots a_{n-1}x+a_n=0$-ன் தீர்வுகளாயின்,

(i) $\Sigma \frac{1}{\alpha_1}$ (ii) $\Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3$ (iii) $\Sigma \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3$-ன் மதிப்புகள் காண்க.

10. $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$-ன் தீர்வுகளின் 6 ஆவது படிகளின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

11. $x^7+5x^4+1=0$-ன் தீர்வுகளின் 11 ஆவது படிகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் என நிறுவுக.

12. $x^4+ax+b=0$-ன் தீர்வுகளின் 20 ஆவது படிகளின் கூட்டுத்தொகை $50a^4b^2-4b^5$ என நிறுவுக.

13. $x^n-px^{n-1}-px^{n-2}-px^{n-3} \ldots -px-p=0$-ன் தீர்வுகளின் r ஆவது படிகளின் கூட்டுத்தொகை $(p+1)^r-1$ என நிறுவுக.

14. $a+b+c+d+e=0$, $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=0$ என்றால்

(i) $(\Sigma a^3)^2 = 3 \Sigma a^6$.

(ii) $\Sigma \frac{a^7}{7} = \Sigma \frac{a^3}{3} \cdot \Sigma \frac{a^4}{4}$ என நிறுவுக.

15. α என்பது $x^7-1=0$-ன் கற்பனைத் தீர்வானால், $(\alpha+\alpha^6)$, $(\alpha^2+\alpha^5)$, $(\alpha^3+\alpha^4)$ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

16. $x^5+px^3+qx^2+s=0$-ன் தீர்வுகளின் 4 ஆவது படிகளின் கூட்டுத் தொகை $2p^2$ என நிறுவுக.

17. α, β, γ என்பன $x^3+qx+r=0$-ன் தீர்வுகளானால்,

(i) $3S_2 S_5 = 5S_3 S_4$

(ii) $\dfrac{\alpha^5+\beta^5+\gamma^5}{5}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{3}\cdot\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}$

(iii) $\dfrac{\alpha^7+\beta^7+\gamma^7}{7}=\dfrac{\alpha^5+\beta^5+\gamma^5}{5}\cdot\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}$

என நிறுவுக.

18. $x^4-3x^3+5x^2-12x+4=0$-ன் தீர்வுகளின் 5 ஆவது படிகளின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

19. $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$ என்ற சமன்பாட்டில் S_4, S_6 காண்க.

20. $x^n+ax+b=0$ என்ற சமன்பாட்டில் $n\geqslant 5$ என்றால் $S_{2n+1}=0$ என நிறுவுக.

21. $x^4-x^2+1=0$ என்ற சமன்பாட்டில் $S_{3n-1}=0$ என நிறுவுக.

22. $S_r=$ தீர்வுகளின் r ஆவது படிகளின் கூட்டுத் தொகையானுல், $x^n+ax^2+b=0$ என்ற சமன்பாட்டில், $n>5$ ஆனுல் $S_{2n-1}=0$ என நிறுவுக.

2·14. சமன்பாடுகளை மாற்றி அமைத்தல் (Transformation of Equations)

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ என்பவை $f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களானுல், $\phi(\alpha_1)$, $\phi(\alpha_2) \ldots \phi(\alpha_n)$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காணுதலே முதல் சமன்பாட்டை மாற்றி அமைத்தல் எனப்படும். இவ்வாறு மாற்றி அமைப்பதால் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காணுவதோ அல்லது அவற்றின் தன்மைகளைப்பற்றி அறிதலோ சில சமயங்களில் எளிதாக இருக்கும். இப்போது சில முக்கியமான எளிய மாற்றங்களைக் கண்டோம்.

2·15. குறியிடு மாற்றியமைக்கப்பட்ட மூலங்கள்

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ $f(x)=0$-ன் மூலங்கள் எனில், $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots -\alpha_n$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு அமைத்தல்.

$$f(x)\equiv x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$$
$$\equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

x ஐ $-y$ என மாற்றி எழுதினுல்

$$(-1)^n y^n + p_1(-1)^{n-1}y^{n-1} + \dots + (-1)\,p_{n-1}\,y + p_n$$
$$\equiv (-1)^n (y+\alpha_1)(y+\alpha_2)\dots(y+\alpha_n)$$

அதாவது $y^n - p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} - \dots + (-1)^n p_n$
$$\equiv (y+\alpha_1)(y+\alpha_2)\dots(y+\alpha_n)$$

எனவே, $-\alpha_1, -\alpha_2 \dots -\alpha_n$ என்பவை

$y^n - p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} - \dots + (-1)^n p_n = 0$ என்ற சமன் பாட்டின் மூலங்களாகும்.

எனவே $f(x) = 0$-ல் $x = -y$ எனப் பிரதியிட்டுப் பெறப்படும் $f(-y) = 0$ நாம் வேண்டும் சமன்பாடாகும். அதாவது கொடுத் துள்ள சமன்பாட்டின் உறுப்புகளை ஒன்றுவிட்டு ஒன்று குறி மாற்றி அமைத்தால் போதும். ஆனுல் விட்டுப்போன படிகளுக்குரிய உறுப்பின் கெழுக்களைப் பூச்சியம் எனக் கொண்டு மாற்றம் செய்தல் வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$7x^6 - 8x^5 + 9x^4 - x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் குறி மாற்றிய எண்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன் பாடு காண்க.

ஒன்று விட்டு ஒன்று அமைந்த உறுப்புகளின் குறியீட்டை மாற்றி அமைக்க $7x^6 + 8x^5 + 9x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0$ என்பது வேண்டும் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^8 - 5x^5 + 4x - 1 = 0$-ன் மூலங்களின் குறியீடுகளை மாற்றி அமைக்க.

விடுபட்டுப்போன உறுப்புகளின் கெழுக்களைப் பூச்சியம் எனக் கொண்டு கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$x^8 + 0.x^7 + 0.x^6 - 5x^5 + 0.x^4 + 0.x^3 + 0.x^2 + 4x - 1 = 0$$

என எழுதலாம். இந்நிலையில் ஒன்றுவிட்டு ஒன்றமைந்த உறுப்பு களின் கெழுக்களைக் குறி மாற்றியமைக்க,

$$x^8 - 0.x^7 + 0.x^6 + 5x^5 + 0.x^4 - 0.x^3 + 0.x^2 - 4x - 1 = 0$$

அதாவது $x^8 + 5x^5 - 4x - 1 = 0$ எனச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

2·16. மூலங்களை ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணால் பெருக்குதல்

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ என்பவை $f(x) = 0$-ன் மூலங்களெனில்

$k\alpha_1,\ k\alpha_2 \ldots k\alpha_n$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காணுதல்.

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) = 0.$$

வேண்டிய சமன்பாடு $(x-k\alpha_1)(x-k\alpha_2)\ldots(x-k\alpha_n) = 0$

அதாவது, $\dfrac{1}{k^n}\left(\dfrac{x}{k}-\alpha_1\right)\left(\dfrac{x}{k}-\alpha_2\right)\cdots\left(\dfrac{x}{k}-\alpha_n\right) = 0$

இச் சமன்பாட்டைக் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் x-க்குப் பதிலாக $\dfrac{x}{k}$ என எழுதுவதன் மூலம் பெறலாம். எனவே கொடுத்துள்ள சமன்பாடு,

$$f(x) = x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0$$

எனில் தேவையான சமன்பாடு,

$$\left(\frac{x}{k}\right)^n + p_1\left(\frac{x}{k}\right)^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\left(\frac{x}{k}\right) + p_n = 0$$

அல்லது

$$x^n + p_1kx^{n-1} + p_2k^2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}k^{n-1}x + p_nk^n = 0$$

எனவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் உறுப்புகளின் அடுத்தடுத்த கெழுக்களை முறையே $1,\ k,\ k^2 \ldots k^n$ என்பவற்றுல் பெருக்கி எழுதினலே வேண்டிய சமன்பாடு பெறப்படுகிறது.

குறிப்பு :

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் மிக உயர்ந்த படியிலமைந்த உறுப்பின் கெழு ஒன்று என இல்லாவிடில், கெழு ஒன்று என அமையுமாறு சமன்பாடு அமைக்க வேண்டியிருந்தால் சமன்பாட்டின் மூலங்களை இந்தக் கெழுவினுல் பெருக்குவதன் மூலம் சமன் பாடு காணலாம்.

(உ-ம்.) $x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{2}{3}x - 1 = 0$-ன் பின்னக் கெழுக்களை மாற்றி அமைக்க.

இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களை 6 ஆல் பெருக்குவதால் கிடைக்கும்

$$\text{சமன்பாடு } x^3 - 6 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 6^2 \cdot \frac{2}{3}x - 6^3 = 0$$

$$\text{அதாவது } x^3 - 3x^2 + 24x - 216 = 0.$$

குறிப்பு 2:

சமன்பாட்டின் பின்னக் கெழுக்களை நீக்க வேண்டின், சமன்பாட்டின் மூலங்களை, பின்னக் கெழுக்களின் பகுதிகளின் அதமப் பொது மடங்கால் பெருக்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{12}x^2 - \frac{13}{900} = 0$-ன் பின்னக் கெழுக்களை நீக்குக.

சமன்பாட்டை

$$x^4 - \frac{5}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{5}{2^2 \cdot 3} + 0.x - \frac{13}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = 0$$

என எழுதலாம். எனவே $2 \times 3 \times 5 = 30$ ஆல் இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களைப் பெருக்கினால் போதுமானது.

$\therefore$ வேண்டிய சமன்பாடு

$$x^4 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \frac{5}{2 \cdot 3}x^3 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \frac{5}{2^2 \cdot 3}x^2$$

$$+ 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 0 \cdot x - \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \times 13}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = 0$$

$$\text{அதாவது } x^4 - 25x^3 + 375x^2 - 11700 = 0$$

2.17. தலைகீழ் மூலங்கள் (Reciprocal Roots):

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தலைகீழ் மாற்றங்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு அமைத்தல்.

$f(x) = 0$ கொடுத்துள்ள சமன்பாடாக இருக்கட்டும். $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{y}$ எனப் பிரதியிட, வேண்டிய சமன்பாடு $f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$ ஆகும்.

எனவே x-க்குப் பதில் $\frac{1}{x}$ எனப் பிரதியிடுவதன் மூலம் தேவையான சமன்பாடு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 5x - 2 = 0$-ன் மூலங்களின் தலைகீழ் மாற்றங்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

இச்சமன்பாட்டில் x-க்குப் பதிலாக $\frac{1}{x}$ எனப் பிரதியிட, வேண்டிய சமன்பாடு

$$\frac{1}{x^4} - \frac{3}{x^3} + \frac{7}{x^2} + \frac{5}{x} - 2 = 0,$$

அதாவது $1 - 3x + 7x^2 + 5x^3 - 2x^4 = 0$

அல்லது $2x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 3x - 1 = 0.$

பயிற்சி 2 (e)

1. $x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 2x + 3 = 0$-ன் தீர்வுகளின் குறி மாற்றிய எண்களைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

2. $x^7 + 3x^5 + x^3 - x^2 + 7x + 2 = 0$-ன் தீர்வுகளின் குறி மாற்றிய எண்களைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

3. $x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$-ன் தீர்வுகளைப் போல் 3 மடங்கான தீர்வுகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

4. $6x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 2 = 0$-ன் தீர்வுகளைப் போல் 6 மடங்கான தீர்வுகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

5. $\frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{16}x - \frac{1}{64} = 0$-ன் பின்னக் கெழுக்களை நீக்குக.

6. $x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{7}{18}x + \frac{1}{108} = 0$-ன் பின்னக் கெழுக்களை நீக்குக.

7. $x^3 - 4x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{9} = 0$-ன் பின்னக் கெழுக்களை நீக்குக.

8. x^4-ன் கெழு 1 ஆகவும் மற்ற கெழுக்கள் முழு எண்களாகவும் இருக்கும்படி $3x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை மாற்றி அமைக்க.

9. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பன $x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 5x - 2 = 0$-ன் தீர்வுகளானல் $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}$ ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பன $x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 2x - 4 = 0$-ன் தீர்வுகளானல் $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}$ ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

2·18. தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாடுகள் (Reciprocal Equations)

ஒரு சமன்பாட்டில் x ஐ $\frac{1}{x}$ என மாற்றுவதால் சமன்பாட்டின் அமைப்பு மாருதிருப்பின், அச்சமன்பாடு 'தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாடு' எனப்படும்.

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0 \quad \dots (1)$$

ஒரு தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாடெனக் கொள்வோம். இங்கு x-ஐ $\frac{1}{x}$ என மாற்றினல்,

$$p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots \dots + p_1 x + 1 = 0$$

அதாவது,

$$x^n + \frac{p_{n-1}}{p_n} \cdot x^{n-1} + \frac{p_{n-2}}{p_n} \cdot x^{n-2} + \dots + \frac{p_1}{p_n} x + \frac{1}{p_n} = 0 \dots (2)$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும்.

சமன்பாடு (1) தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாடு ஆதலின் (1), (2) ஆகிய இரண்டும் ஒரே சமன்பாட்டைக் குறிக்க வேண்டும்.

$$\therefore \frac{p_{n-1}}{p_n} = p_1, \frac{p_{n-2}}{p_n} = p_2 \dots \dots \frac{p_1}{p_n} = p_{n-1}, \frac{1}{p_n} = p_n$$

$$\therefore p_n^2 = 1 \qquad \therefore p_n = \pm 1$$

வகை i

$$p_n = 1$$

$$\therefore p_{n-1} = p_1, \quad p_{n-2} = p_2, \; p_{n-3} = p_3 \dots \dots$$

இங்கு முதலிலிருந்தும் கடைசியிலிருந்தும் சம தூரத்தில் அமைந்துள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்கள் எண் மதிப்பிலும் குறியிலும் ஒன்ருயிருக்கும்.

வகை ii

$$p_n = -1.$$

$$\therefore \quad p_{n-1} = -p_1, \quad p_{n-2} = -p_2 \ldots p_1 = -p_{n-1}$$

இங்கு முதலிலிருந்தும் கடைசியிலிருந்தும் சம தூரத்தில் அமைந்துள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்கள் எண் மதிப்பில் ஒன்ருகவும், குறியில் மாறுபட்டும் இருக்கும்.

2.19 தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாடுகளின் திட்ட அமைப்பு (Standard form of Reciprocal Equations)

தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் α எனில், $\frac{1}{\alpha}$-ம் ஒரு மூலமாக இருத்தல் வேண்டும். ஏனெனில் $\frac{1}{\alpha}$ மாற்றியமைக் கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம்; ஆனல் மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு முதல் சமன்பாடு ஆகிய இரண்டும் ஒன்றே. எனவே, ஒரு தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் இரண்டிரண்டு மூலங் களாக வரும். $\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}, \beta, \frac{1}{\beta} \ldots \ldots\right)$. சமன்பாட்டின் படி ஒற்றைப்படையாக இருப்பின் ஒரு மூலத்தின் தலைகீழ் மாற்றம் அந்த மூலத்திற்குச் சமமாகும்.

அதாவது, $\gamma = \frac{1}{\gamma} \quad \therefore \quad \gamma^2 = 1 \quad \therefore \quad \gamma = \pm 1$

சமன்பாட்டின் உறுப்புகளின் குறி ஒன்றேயானல் -1 ஒரு தீர்வாகும்; முதலிலிருந்தும் இறுதியிலிருந்தும் சமதூரத்திலுள்ள உறுப்புகளின் குறி மாறுபட்டிருந்தால், $+1$ ஒரு தீர்வாகும். இரு நிலைகளிலும் சமன்பாட்டை $(x+1)$ அல்லது $(x-1)$ ஆல் வகுப் பதன் மூலம் சமன்பாட்டின் படி ஒன்று குறையுமாறு செய்யலாம். இவ்வாறு அமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு எப்போதும் ஓர் இரட்டைப் படைப்'படி' தலைகீழ்மாற்றுச் சமன்பாடாகும். இதன் உறுப்புகளின் கெழுக்கள் ஒரே குறியைக் கொண்டிருக்கும்.

அடுத்து, ஒரு தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாட்டின் படி இரட்டைப் படை எனவும் $(n = 2m)$, முதலிலிருந்தும் இறுதியிலிருந்தும் சம தூரத்திலமைந்த உறுப்புகள் மாறுபட்ட குறியை உடையன

வாகவும் இருந்தால், $p_m = -p_m$ அதாவது $p_m = 0$. எனவே இவ்வகைச் சமன்பாட்டில் நடு உறுப்பு இராது. எனவே இச் சமன்பாட்டை $x^{2m-2}-1+(x^{2m}-1)p_1x+\dots=0$ என எழுத லாம்.

இதை (x^2-1) ஆல் வகுக்க ஓர் இரட்டைப்படைப்'படி' தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாடு கிடைக்கும். இதன் உறுப்புகளின் கெழுக்கள் ஒரே குறியைப் பெற்றிருக்கும். எனவே கெழுக்கள் ஒரே குறியை உடையனவான ஓர் இரட்டைப்படைப்'படி' தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாட்டை ஒரு தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாட்டின் திட்ட அமைப்பாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு :

இங்கு விளக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் $x+\frac{1}{x}=y$ என்று பிரதியிடுவதன் மூலம் சமன்பாட்டின் படியைப் பாதியளவாகக் குறைக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^5-5x^4+9x^3+9x^2+5x-1=0$-ன் தீர்வு காண்க. இச்சமன்பாட்டிற்கு $(x-1)$ ஒரு காரணி. இக்காரணியை நீக்கக் கிடைப்பது $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$

$$\text{அதாவது } \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0.$$

$x+\frac{1}{x}=u$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore\ u^2-2-4u+5=0$$

$$u^2-4u+3=0$$

$$(u-3)(u-1)=0$$

$$u=3,\ 1$$

அதாவது $x+\frac{1}{x}=3$ அல்லது $x+\frac{1}{x}=1$

$$x^2-x+1=0 \qquad \therefore\ x=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \therefore \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

எனவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

$$1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$-ன் தீர்வு காண்க.

இது ஒரு தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாடாகும்.

x^2 ஆல் முழுவதும் வகுக்க,

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = y$ எனப் பிரதியிட,

$$y^2 - 2 - 10y + 26 = 0$$

$$y^2 - 10y + 24 = 0$$

$$\therefore \quad y = 6, \quad 4.$$

$$\therefore \quad x + \frac{1}{x} = 6, \quad 4.$$

$y = 6$ எனில் $x^2 - 6x + 1 = 0 \quad \therefore \quad x = 3 \pm 2\sqrt{2}$

$y = 4$ எனில் $x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \therefore \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$

$$= 2 \pm \sqrt{3}$$

$\therefore$ சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $3 \pm 2\sqrt{2}, \quad 2 \pm \sqrt{3}$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

தீர்வு காண்க :

$$6x^5 + 11x^4 - 33x^3 - 33x^2 + 11x + 6 = 0$$

ஒன்றுவிட்டு ஒன்று கெழுக்களின் கூடுதல் சமம். $\therefore \; x = -1$ சமன்பாட்டின் ஒரு மூலமாகும். $(x+1)$ ஆல் வகுக்க,

கிடைப்பது, $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$ ஆகும்.

x^2 ஆல் வகுக்க,

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = y$ எனப் பிரதியிட்டால்

$$6(y^2-2) + 5y - 38 = 0$$

$$6y^2 + 5y - 50 = 0$$

$$(3y+10)(2y-5) = 0.$$

$\therefore\quad y = \frac{5}{2}$ அல்லது $-\frac{10}{3}$

$y = \frac{5}{2}$ எனில் $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = 2,\ \frac{1}{2}.$$

$y = -\frac{10}{3}$ எனில் $x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3}$

$$3x^2 + 10x + 3 = 0$$

$$\therefore\quad x = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{6} = -3,\ -\frac{1}{3}.$$

$\therefore$ சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

$-1,\ -\frac{1}{3},\ -3,\ +\frac{1}{2},\ 2$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

தீர்வு காண்க :

$$6x^6 - 25x^5 + 31x^4 - 31x^2 + 25x - 6 = 0$$

சமன்பாட்டை $6(x^6-1) - 25x(x^4-1) + 31x^2(x^2-1) = 0$ என எழுதலாம்.

$\therefore \quad x^2 = 1$, அதாவது $x = 1, -1$ என்பவை இரு மூலங்கள்.

சமன்பாட்டை $(x^2 - 1)$ ஆல் வகுக்க,

$$6(x^4 + x^2 + 1) - 25x(x^2 + 1) + 31x^2 = 0$$

$$6\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right) - 25\left(x + \frac{1}{x}\right) + 31 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = z$ என்க. $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$

$$6(z^2 - 2 + 1) - 25z + 31 = 0$$

$$6z^2 - 25z + 25 = 0$$

$$(3z-5)(2z-5) = 0 \qquad \therefore \quad z = \frac{5}{2}, \frac{5}{3}$$

$\therefore \quad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{3}$ எனில் $3x^2 - 5x + 3 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{-11}}{6} = \frac{5 \pm i\sqrt{11}}{6}$$

$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ எனில் $2x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{9}}{4} = 2, \frac{1}{2}.$$

$\therefore$ மூலங்கள் $1, -1, 2, \frac{1}{2}, \frac{5 \pm i\sqrt{11}}{6}$

பயிற்சி 2 (f)

பின் கொடுத்திருக்கும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்:

1. $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$.
2. $6x^6 - 25x^5 + 31x^4 - 31x^2 + 25x - 6 = 0$.
3. $2x^5 + x^4 + x + 2 = 12x^3 + 12x^2$
4. $x^6 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$.
5. $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.

6. $4x^4-20x^3+33x^2-20x+4=0.$

7. $3x^4-10x^3+6x^2-10x+3=0.$

8. $x^5-3x^4-14x^3-14x^2-3x+1=0.$

9. $x^5+4x^4+7x^3+7x^2+4x+1=0.$

10. $x^5+6x^4+11x^3+11x^2+6x+1=0.$

11. $6x^5-x^4-43x^3+43x^2+x-6=0.$

12. $x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0.$

13. $x^{10}-3x^8+5x^6-5x^4+3x^2-1=0.$

14. $6x^6-25x^5+31x^4-31x^2+25x-6=0.$

15. $2x^6-9x^5+10x^4-3x^3+10x^2-9x+2=0.$

16. $6x^6-17x^5+18x^4-18x^2+17x-6=0.$

17. $2x^6-x^5-2x^3-x+2=0.$

2·20 கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் குறிப்பிட்ட அளவால் குறைத்தல் (To diminish the roots of an equation by a given quantity)

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ என இருக்கட்டும். இதிலிருந்து $\alpha_1 - h, \alpha_2 - h, \dots \dots, \alpha_n - h$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

$$f(x) = a_0 (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \dots (x-\alpha_n)$$

இதில் x ஐ $y+h$ என மாற்றியமைக்க,

$$f(y+h) \equiv a_0 (y+h-\alpha_1)(y+h-\alpha_2) \dots (y+h-\alpha_n)$$

$$\equiv a_0 (y-\overline{\alpha_1-h})(y-\overline{\alpha_2-h}) \dots (y-\overline{\alpha_n-h})$$

$\therefore\ y = \alpha_1 - h, \quad \alpha_2 - h, \dots, \alpha_n - h$ என்ற மதிப்புகளுக்கு வலப் பக்கம் பூச்சியமாவதால் $\alpha_1 - h, \alpha_2 - h, \dots, \alpha_n - h$ என்பவை $f(y+h) = 0$-ன் மூலங்களாகும். எனவே, தேவையான மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$x=y+h$ எனக் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிடுவதன் மூலம் கிடைக்கும்.

அதாவது,

$$a_0 (y+h)^n + a_1 (y+h)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (y+h) + a_n = 0 \quad (1)$$

இதை விரித்தெழுதி,

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \dots + A_{n-1} y + A_n = 0 \quad \dots (2)$$

என்ற முறையில் அமைக்கலாம். இங்கு $A_0, A_1, \dots \dots A_n$ என்பவை $a_0, a_1 \dots a_n$ என்பவற்றைச் சார்ந்திருக்கும்.

$y=x-h$ ஆதலால் (2)-ஐ

$$A_0 (x-h)^n + A_1 (x-h)^{n-1} + A_2 (x-h)^{n-2} + \dots \dots$$
$$+ A_{n-1} (x-h) + A_n = 0 \quad \dots (3)$$

என எழுதலாம். ஆனால், (1), (3) ஆகியவை ஒரே சமன்பாட்டைக் குறிக்கும். எனவே, (1) ஐ (3)-ன் அமைப்பில் எழுதினால் $A_0, A_1, \dots \dots \dots, A_n$-ன் மதிப்புகளை எளிதில் பெறலாம்.

$A_0 = a_0$ என்பது தெளிவு.

சமன்பாடு (3)-ன் இடப் பக்கத்தை $(x-h)$ ஆல் வகுத்தால் மீதி A_n, ஈவு $A_0 (x-h)^{n-1} + A_1 (x-h)^{n-2} + A_2 (x-h)^{n-3} + \dots \dots + A^{n-2} (x-h) + A_{n-1}$. இக்கோவையை $(x-h)$ ஆல் வகுக்க, மீதி A_{n-1} எனக் கிடைக்கும். இதேபோன்று அடுத்தடுத்து $(x-h)$ ஆல் வகுத்துக்கொண்டே போனால் முறையே $A_{n-2}, A_{n-3} \dots$ என்பவற்றை மீதியாகப் பெறுகிறோம். இம்முறையில் $A_0, A_1, \dots, A_n$ என்ற கெழுக்களைக் கண்டுபிடிக்கிறோம்.

குறிப்பு :

சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் குறைப்பதற்குப் பதிலாக அதிகரிக்க வேண்டின், 'h'க்குப் பதிலாக $-$'h' என எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^3 - 5x^2 + 6x - 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஒவ்வொன்றையும் விட ஒன்று அதிகமானதாக மூலங்களைக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

இங்கு $h = -1$.

எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் கெழுக்களை x^3-5x^2+6x-3ஐ $(x+1)$ ஆல் அடுத்தடுத்து வகுத்து வரும் மீதியைக் காணலாம்.

தொகு முறை வகுத்தல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

-1	1	-5	6	-3
		-1	6	-12
-1	1	-6	12	-15
		-1	7	
-1	1	-7	19	
		-1		
	1	-8		

எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$$x^3-8x^2+19x-15=0 \text{ ஆகும்.}$$

விளக்கம் :

சமன்பாட்டின் உறுப்புகளின் கெழுக்களை ஒரே கோட்டில் வரிசையாக எழுதுக. கோவையை $(x+1)$ ஆல் வகுத்து வரும் மீதி -15. மறுபடியும் $(x+1)$ ஆல் வகுக்க, கிடைக்கும் மீதி 19, ஈவு $(x-7)$. இதை மறுபடியும் $(x-1)$ ஆல் வகுத்தால் ஈவு 1 எனவும் மீதி -8 எனவும் வரும். எனவே -15, $+19$, -8, $+1$ என்பவை மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் கடைசியிலிருந்து அமையும் உறுப்புகளின் கெழுக்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^5+4x^3-x^2+11=0$-ன் மூலங்களைவிட மூன்று குறைவாக மூலங்கள் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

$h=3$ $\therefore$ மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் கெழுக்களைக் காண $(x^5+4x^3-x^2+11)$ஐ $(x-3)$ ஆல் மீண்டும் மீண்டும் வகுக்க வேண்டும்.

3	1	0	4	−1	0	11
		3	9	39	114	342
	1	3	13	38	114	353
		3	18	93	393	
		6	31	131	507	
		3	27	174		
		9	58	305		
		3	36			
		12	94			
		3				
		15				

∴ தேவையான சமன்பாடு $x^5 + 15x^4 + 94x^3 + 305x^2 + 507x + 353 = 0$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$3x^4 + 7x^3 - 15x^2 + x - 2 = 0$-ன் மூலங்களை 7ஆல் அதிகரிக்கவும்.

இங்கு $h = -7$

3	7	−15	1	−2	7
	−21	98	−581	4060	
	−14	83	−580	4058	
	−21	242	−2296		
	−35	328	−2876		
	−21	392			
	−56	720			
	−21				
	−77				

எனவே, மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$3x^4 - 77x^3 + 720x^2 - 2876x + 4058 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

2·21. முதற்கண் விளக்கப்பட்ட மாற்றம், ஒரு சமன்பாட்டிலிருந்து குறிப்பிட்ட ஓர் உறுப்பை நீக்குவதற்குப் பயன்படுத்தலாம். இம் முறையால் ஒரு சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்பதையும் எளிதாக்கலாம்.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

என எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதில் $y = x-h$ எனப் பிரதியிட,

$$a_0(y+h)^n + a_1(y+h)^{n-1} + a_2(y+h)^{n-2} + \dots \\ \dots + a_{n-1}(y+h) + a_n = 0$$

என்ற புதிய சமன்பாடு கிடைக்கும். இதை

$$a_0y^n + (a_0nh+a_1)y^{n-1} + \left\{\frac{n(n-1)}{2!}a_0h^2 + (n-1)a_1h + a_2\right\}y^{n-2} + \dots = 0$$

என எழுதலாம்.

இரண்டாவது உறுப்பை நீக்க வேண்டின்

$$na_0h + a_1 = 0 \text{ ஆதல் வேண்டும்.}$$

அதாவது $h = -\dfrac{a_1}{na_0}$. எனவே சமன்பாட்டின் மூலங்களை $-\dfrac{a_1}{na_0}$ ஆல் குறைத்தால் மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் இரண்டாம் உறுப்பு இராது. இதேபோன்று மேற்குறித்த சமன்பாட்டினின்றும் மூன்றும் உறுப்பை நீக்க வேண்டின்,

$$\frac{n(n-1)}{2}a_0h^2 + (n-1)a_1h + a_2 = 0$$

h-ல் அமைந்த இவ்விருபடி சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் மூலம் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் குறைக்க வேண்டும். அப்போது மாற்றியமைக்கப்படும் சமன்பாட்டில் மூன்றும் உறுப்பு (x^{n-2}ஐ உடைய உறுப்பு) இராது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$x^4 + 20x^3 + 143x^2 + 430x + 462 = 0\text{-ன்}$$

இரண்டாம் உறுப்பை நீக்கி, சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க. மூலங்களை h ஆல் குறைப்பதன் மூலம் x^3 உறுப்பு நீக்கப்படுவதாகக் கொள்வோம்.

எனவே, மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$(x+h)^4 + 20(x+h)^3 + 143(x+h)^2 + 430(x+h) + 462 = 0$$

அதாவது,

$$x^4+x^3(4h+20)+x^2(\qquad\qquad) + \ldots = 0$$

$$\therefore \quad 4h + 20 = 0 \text{ அல்லது } h = -5$$

எனவே இரண்டாவது உறுப்பை நீக்க, மூலங்களை 5 ஆல் அதிகரிக்க வேண்டும்.

1	20	143	430	462	| −5
	−5	−75	−340	−450	
	15	68	90	12	
	−5	−50	−90		
	10	18	0		
	−5	−25			
	5	− 7			
	−5				
	0				

எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது $(x^2-4)(x^2-3) = 0$

$$\therefore \quad x = \pm 2, \ \pm\sqrt{3}.$$

ஆகவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

$$\sqrt{3} - 5, \ -\sqrt{3} - 5, \ 2 - 5, \ -2 - 5$$

அதாவது $\sqrt{3} - 5, \ -\sqrt{3} - 5, \ -3, \ -7$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

α, β, γ என்பவை $x^3 - 7x + 6 = 0$-ன் மூலங்களெனில் $\alpha^2 + 3\alpha + 2,\ \beta^2 + 3\beta + 2,\ \gamma^2 + 3\gamma + 2$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

இங்கு

$$y = x^2 + 3x + 2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

$$x^3 - 7x + 6 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

இவற்றிலிருந்து xஐ நீக்க வேண்டும்.

(i) இலிருந்து $x^2 + 3x + (2-y) = 0 \quad \ldots \quad \text{(i)}$

இதை x ஆல் பெருக்கி (ii) இலிருந்து கழித்தால் கிடைப்பது

$$-7x - 3x^2 + 6 - x(2-y) = 0$$

அதாவது $\quad 3x^2 + (9-y)x - 6 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iii)}$

(i), (iii) இலிருந்து

$$\frac{x^2}{-18-(2-y)(9-y)} = \frac{x}{3(2-y)+6} = \frac{1}{(9-y)-9}$$

$$(12-3y)^2 = -y(-y^2+11y-36)$$

இதிலிருந்து கிடைப்பது

$$y^3 - 20y^2 + 108y - 144 = 0$$

இது கேட்கப்பட்ட சமன்பாடு ஆகும்.

பயிற்சி 2 (g)

1. $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ என்பன $2x^5 + x^4 - 3x^2 - x + 2 = 0$-ன் மூலங்களானால்,

   (i) கொடுக்கப்பட்ட மூலங்களைவிட 2 குறைவாக

   (ii) ,, ,, ,, 4 அதிகமாக

   (iii) ,, ,, ,, 1 குறைவாக

   (iv) ,, ,, ,, 3 அதிகமாக

   மூலங்களைக் கொண்ட சமன்பாடுகளைக் காண்க.

இ. க.—18

2. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ என்பன $x^5-4x^4+3x^2-4x+4=0$-ன் மூலங்களானால், (α_1-3), (α_2-3), (α_3-3), (α_4-3), (α_5-3) ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

கீழே கொடுக்கப்பட்ட α, β, γ ... என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடுகளிலிருந்து, கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைக்குட்பட்ட மூலங்களைக் கொண்ட சமன்பாடுகளைக் காண்க :

சமன்பாடு	நிபந்தனை
3. $x^3-9x^2+28x-27=0$.	இதன் மூலங்களிலிருந்து 3 குறைவாக.
4. $x^5+4x^3-x^2+11=0$.	இதன் மூலங்களிலிருந்து 3 குறைவாக.
5. $x^4+3x^2-4x+9=0$.	இதன் மூலங்களிலிருந்து 5 குறைவாக.
6. $3x^5-5x^3+7=0$.	இதன் மூலங்களிலிருந்து 4 அதிகமாக.
7. $4x^5-2x^3+7x-3=0$.	இதன் மூலங்களிலிருந்து 2 அதிகமாக.
8. $x^4-5x^3+7x^2-4x+5=0$.	இதன் மூலங்களிலிருந்து 2 குறைவாக

9. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பன $4x^4+32x^3+83x^2+76x+21=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஆனால் $(\alpha+2)$, $(\beta+2)$, $(\gamma+2)$, $(\delta+2)$ ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் கண்டு, தீர்வு காண்க.

10. $x^4+5x^3+9x^2+5x-1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களிலிருந்து 2 குறைவாக உள்ள மூலங்களைக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் கண்டு, தீர்வு காண்க.

கீழ்வரும் சமன்பாடுகளில் இரண்டாவது உறுப்பை நீக்கித் தீர்வு காண்க :

11. $x^3-6x^2+4x-7=0$.

12. $x^3-6x^2+10x-8=0$.

13. $x^4+4x^3+2x^2-4x-2=0$.

14. $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 2 = 0.$

15. $x^3 + 6x^2 + 12x - 19 = 0.$

16. (i) $x^4 + 16x^3 + 72x^2 + 64x - 129 = 0.$

(ii) $x^4 + 20x^3 + 143x^2 + 430x + 462 = 0$

17. $x^4 + 16x^3 + 83x^2 + 152x + 84 = 0.$

18. $x^3 - 12x^2 - 48x - 72 = 0.$

19. $x^3 + 6x^2 + 12x - 19 = 0.$

20. $x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x + 2 = 0.$

2·22 சமன்பாட்டின் பொதுவான மாற்றங்கள் (Transformations in general)

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ என்பவை $f(x) = 0$-ன் மூலங்களாக இருக்கட்டும். $\phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2), \ldots, \phi(\alpha_n)$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண வேண்டுவதாக இருக்கட்டும். α_1, $f(x) = 0$-ன் ஒரு மூலமெனில் $\phi(\alpha_1)$ தேவையான சமன்பாட்டின் மூலமாகும்.

எனவே, $y = \phi(x)$ என்பது இவ்விரு மூலங்களுக்கிடையே யுள்ள தொடர்பின் அமைப்பாகும்.

$f(x) = 0,$

$y = f(x)$ - இவற்றிலிருந்து x-ஐ நீக்கினால் கிடைக்கும் y-ல் அமைந்த சமன்பாடே தேவையான சமன்பாடு ஆகும். இம் முறையின் விளக்கம் அடுத்து வரும் சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் தெளிவுபடுத்தப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^3 - x^2 + 8x - 6 = 0$-ன் மூலங்களின் வர்க்கங்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β, γ எனில் $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண வேண்டும்.

$\therefore$ $y = x^2$ அதாவது, $x = \sqrt{y}$ எனக் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிடுவோம்.

$$y\sqrt{y} - y + 8\sqrt{y} - 6 = 0$$

$$(y+6) = \sqrt{y}\,(y+8)$$

$$\therefore\quad (y+6)^2 = y(y+8)^2$$

$$y^3 + 15y^2 + 52y - 36 = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

α, β, γ என்பவை $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில்,

$$\frac{\alpha^2 - \beta\gamma}{\alpha},\ \frac{\beta^2 - \gamma\alpha}{\beta},\ \frac{\gamma^2 - \alpha\beta}{\gamma}$$

என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

(செ.ப.க.)

சமன்பாடு $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ... ... (1)

எனவே $\alpha + \beta + \gamma = -p$

$\alpha\beta\gamma = -r$

$$\therefore\quad \frac{\alpha^2 - \beta\gamma}{\alpha} = \alpha - \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha^2} = \alpha + \frac{r}{\alpha^2}$$

$\therefore\quad y = x + \frac{r}{x^2}$ எனப் பிரதியிடுவோம்.

அதாவது $x^2 y = x^3 + r$

$x^3 - x^2 y + r = 0$ ... ... (2)

$$\therefore\quad (1) - (2) = (p+y)x^2 + qx = 0$$

$$\therefore\quad x = -\frac{q}{p+y}$$

மாற்றி அமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$\left(\frac{-q}{p+y}\right)^3 + p\left(\frac{-q}{p+y}\right)^2 + q\left(\frac{-q}{p+y}\right) + r = 0$$

அதாவது $r(p+y)^3 - q^2(p+y)^2 + pq^2(p+y) - q^3 = 0.$

$$ry^3 - y^2(3pr - q^2) + y(3p^2r - pq^2) + (p^3r - q^3) = 0.$$

பயிற்சி 2 (h)

1. $x^3 - 14x + 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் a, b, c ஆனால் b^2+c^2, c^2+a^2, a^2+b^2 ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2. α, β, γ என்பன $x^3 + qx + r = 0$-ன் மூலங்களானால், $\beta^3 + \gamma^3$, $\gamma^3 + \alpha^3$, $\alpha^3 + \beta^3$ என்பன $(x + 2r)^3 + q^3(x+3r) = 0$-ன் மூலங்கள் என்று காட்டு.

α, β, γ என்பன கீழே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் மூலங்களானால், கொடுக்கப்பட்ட மூலங்களைக் கொண்டு புதிய சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

	சமன்பாடுகள்	கொடுக்கப்பட்ட மூலங்கள்
3.	$x^3-3px^2+3qx-r=0$	$\alpha+\beta,\ \beta+\gamma,\ \gamma+\alpha$
4.	$x^3+px^2+qx+r=0$	$\alpha^2+\alpha,\ \beta^2+\beta,\ \gamma^2+\gamma$
5.	$x^3+2x^2-3x-5=0$	$\frac{\alpha-1}{\alpha+2},\ \frac{\beta-1}{\beta+2},\ \frac{\gamma-1}{\gamma+2}$
6.	$x^3-2x^2+x-1=0$	$\alpha^3,\ \beta^3,\ \gamma^3$.

7. α, β, γ என்பன $9x^3 - 27x^2 + 20x - 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள், $\beta = 3\alpha + 1$ ஆனால் அதன் தீர்வு காண்க.

8. α, β, γ என்பன $3x^3 - 7x^2 - 22x + 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள், $\beta = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ ஆனால், அதன் தீர்வு காண்க.

9. $x^3 - 3ax + b = 0$-ன் மூலங்கள் α, β, γ ஆனால், $\Sigma(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) = 9a$ என்று நிறுவி.

10. $x^3 + 2x^2 + 3x + 3 = 0$-ன் மூலங்கள் α, β, γ ஆனால்,
$$\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2} + \frac{\beta^2}{(\beta+1)^2} + \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)^2} = 13$$
என்று காட்டுக.

11. a, b, c, d என்பன $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$-ன் மூலங்கள் ஆனால் $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d)^2 = (s-q+1)^2+(r-p)^2$ என்று காட்டுக.

12. α, β, γ என்பன $x^3-x-1=0$. என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களானால் $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}=-7$ என்று நிறுவுக.

α, β, γ ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட மூலங்களுக்குச் சமன்பாடுகளை அமைக்கவும்.

சமன்பாடுகள்	கொடுக்கப்பட்ட மூலங்கள்
13. $x^3-px^2+qx-n=0$.	$\alpha\beta+\frac{1}{\alpha}$, $\beta\gamma+\frac{1}{\alpha}$, $\alpha\gamma+\frac{1}{\beta}$.
14. $x^3-px^2+qx-n=0$.	$\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}$, $\frac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}$, $\frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}$.
15. $x^3-3x+1=0$.	$(\alpha-2), (\beta-2), (\gamma-2)$.
16. $x^3-3x+1=0$.	$(\alpha-2)^2, (\beta-2)^2, (\gamma-2)^2$
17. $x^3-3x+1=0$.	$\frac{1}{(\alpha-2)^2}, \frac{1}{(\beta-2)^2}, \frac{1}{(\gamma-2)^2}$.

18. $x^3-qx+r=0$-ன் மூலங்கள் α, β, γ ஆனால்,

(i) $\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$, $\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)$, $\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)$

(ii) $\frac{1}{\beta+\gamma-\alpha}+\frac{1}{\gamma+\alpha-\beta}+\frac{1}{\alpha+\beta-\gamma}$

(iii) $\Sigma\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta+\gamma}$

—மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

ஒரு சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் காணுமலேயே அவற்றின் தன்மையைத் தீர்மானிக்கலாம்.

2·23. சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் தன்மை காணல் (To find the Nature of the roots of an equation)

$x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் உறுப்புகளின் குறிகளை வரிசையாக எழுதினால் $+ - + + -$ எனக் கிடைக்கிறது. இங்கு முதல் உறுப்பிலிருந்து 2 ஆம் உறுப்பிற்கு $+$ இலிருந்து $-$க்கு ஒரு குறி மாற்றமெனவும், 2 ஆம் உறுப்பிலிருந்து 3 ஆவதற்கு $-$ இலிருந்து $+$க்கு ஒரு குறி மாற்றமெனவும், 3 ஆம் உறுப்பிலிருந்து நான்காம் உறுப்பிற்கு $+$லிருந்து $+$க்கு குறி மாற்றம் அல்ல எனவும், இறுதியாக நான்காம் உறுப்பிலிருந்து ஐந்தாம் உறுப்பிற்கு $+$ இலிருந்து $-$ க்கு ஒரு குறி மாற்றமெனவும், ஆக மொத்தம் மூன்று குறி மாற்றங்கள் அமைந்துள்ளன. இதேபோன்று

$x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 8x - 1 = 0$-ல் 3 குறி மாற்றங்களும்,

$x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 8x + 1 = 0$-ல் 4 குறி மாற்றங்களும்,

$x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 8x + 1 = 0$-ல் 2 குறி மாற்றங்களும்,

$x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0$-ல் குறி மாற்றமே இல்லாமலும் அமைந்துள்ளன. ஒரு சமன்பாட்டில் அமைந்துள்ள உறுப்புகளின் குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை, சமன்பாட்டின் மெய்யெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கையைத் தீர்மானிக்கப் பயன்படுகிறது.

2.24. டேகார்டின் குறி விதி (Descarts' Rule of Signs)

(கூட்டு மெய் மூலங்கள்)

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் கூட்டு மெய்யெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை அச்சமன்பாட்டில் தோன்றும் குறி மாற்றங்களின் **எண்ணிக்கைக்கு மிகைப்படாது.**

$f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் 2 உறுப்புகளின் குறிகள் **கீழ்க்கண்ட** வரிசையிலிருப்பதாக அமையட்டும்.

$$+ + - - + - + - - - +$$

இங்குக் குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை ஆறு ஆகும்.

$f(x)$-ஐ $(x-\alpha)$ ஆல் பெருக்குவோம். (α கூட்டு மெய்யெண்) பெருக்கற்பலனிலுள்ள உறுப்புகளின் குறியைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & + & + & - & - & + & - & + & - & - & - & + \\
 & & & & & & & & & & + & - \\
\hline
 & - & - & + & + & - & + & - & + & + & + & - \\
+ & + & - & - & + & - & + & - & - & - & + & \\
\hline
+ & \pm & - & \mp & + & - & + & - & \mp & \pm & + & - \\
\hline
\end{array}
$$

கடைசி வரிசையில், மாறுபட்ட குறிகளைக் கொண்ட இரு உறுப்புகளைக் கூட்டும்போது $\pm$ அல்லது $\mp$ என்ற குறி அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதாவது இவ்வுறுப்புகளின் குறி $+$ எனவோ அல்லது $-$ எனவோ இருக்கலாம். இப்போது கடைசி வரிசையில் குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் கண்டு பிடிப்போம்.

$f(x)$-ல், அதாவது, முதல் வரிசையில் 11 உறுப்புகளும் 6 குறி மாற்றங்களும் உள்ளன. $f(x)\,(x-\alpha)$-ல், அதாவது, கடைசி வரிசையில் முதல் 11 உறுப்புகளின் குறிகளும், $f(x)$-ல் உள்ள 11 உறுப்புகளின் குறிகளை அவ்வாறே பெற்றுள்ளன என வைத்துக் கொண்டால் கூட, $f(x)\,(x-\alpha)$-ல் கடைசி உறுப்பை (12 ஆம் உறுப்பு) பொறுத்த வரையில் ஒரு குறி மாற்றம் அதிகமாக உள்ளது. அதாவது $f(x)$-ல் 6 குறி மாற்றங்கள் இருப்பின் $f(x)\,(x-\alpha)$-ல் குறைந்தது 7 குறி மாற்றங்களாவது இருக்கும்.

ஆகவே α கூட்டு மெய்யெண்ணானால் $f(x)$ ஐ $(x-\alpha)$ ஆல் பெருக்கும்போது $f(x)(x-\alpha)$-ல் $f(x)$-ன் குறி மாற்றங்களைவிட குறைந்தது ஒரு குறி மாற்றமாவது அதிகமாக இருக்கும்.

இப்பொழுது $f(x)=0$-ன் குறை மெய் மூலங்கள், கற்பனை மூலங்கள் இவற்றை ஒத்த காரணிகளின் பெருக்குத் தொகை $F(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை எனக் கொள்வோம். $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ என்பவை $f(x)=0$-ன் கூட்டு மெய் மூலங்கள் எனில், $F(x)$ ஐ $(x-\alpha_1)$, $(x-\alpha_2)$ ... $(x-\alpha_n)$. என்ற ஒவ்வொரு காரணியாலும் பெருக்கும்போது ஒவ்வொன்றிற்கும் குறைந்தது ஒரு குறி மாற்ற மேனும் அதிகரிக்கும். எனவே, $F(x)$ ஐ $f(x)=0$-ன் கூட்டு மெய் மூலங்களுக்கான காரணிகள் எல்லாவற்றாலும் பெருக்கி $f(x)=F(x)\,(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$ என வரும் கோவையில் குறைந்தது n குறி மாற்றங்களேனும் இருக்கும். அதாவது

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் கூட்டு மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கை $f(x)$-ல் அமைந்த குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைவிட அதிகமாக இருக்க முடியாது. இதுவே டிகார்ட்டின் குறி விதி எனப்படும்.

குறை மெய் மூலங்கள் (Negative Roots) :

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ என்பவை கூட்டு மெய்யெண்களெனில்,

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_n) \text{ என இருக்கட்டும்.}$$

இதில் x ஐ $-x$ என மாற்றி எழுதினால் கிடைப்பது,

$$f(-x) = (-x-\alpha_1)(-x-\alpha_2) \ldots (-x-\alpha_n)$$
$$= (-1)^n (x+\alpha_1)(x+\alpha_2) \ldots (x+\alpha_n)$$

$\therefore$ $f(-x) = 0$-ன் மூலங்கள் $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n$

அதாவது $f(x)=0$-ன் குறை மெய் மூலங்கள், $f(-x)=0$-ன் கூட்டு மெய் மூலங்கள் ஆகின்றன.

எனவே, $f(x)=0$-ன் குறை மெய் மூலங்களின் மிக அதிகமான எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடிக்க $f(-x)=0$-ன் கூட்டு மெய் மூலங்களின் மிக அதிகமான எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடித்தால் போதும். ஆகவே, $f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் குறை மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கை $f(-x)$-ல் அமைந்த குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையை விட அதிகமாக இருக்க முடியாது.

குறிப்பு :

டிகார்ட்டின் குறி விதியிலிருந்து ஒரு சமன்பாட்டின் மெய் யெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண இயலாது. இவ்வெண்ணிக்கையின் மிக உயர்ந்த எல்லையையே காணமுடியும். மேலும் இவ்விதியின் மூலம் ஒரு சமன்பாட்டிற்குக் கற்பனை மூலங்கள் உள்ளனவா எனவும் கண்டுபிடிக்கலாம். ஏனெனில், ஒரு சமன்பாட்டின் கூட்டு மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கையின் உயர் எல்லை p எனவும், குறை மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கையின் உயர் எல்லை q எனவும் இருந்தால் அச்சமன்பாட்டிற்குக் குறைந்தது $n-(p+q)$ கற்பனை மூலங்களாவது இருத்தல் வேண்டும். இங்கு n, சமன்பாட்டின் படியைக் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^6 - 3x^2 - x + 1 = 0$-க்குக் குறைந்தது இரு கற்பனை மூலங்களேனும் உள்ளன என நிரூபிக்க,

$$f(x) = x^6 - 3x^2 - x + 1 \quad \text{என இருக்கட்டும்.}$$

$$f(-x) = x^6 - 3x^2 + x + 1$$

$f(x)$-ல் இரண்டு குறி மாற்றங்களும், $f(-x)$-ல் இரண்டு குறி மாற்றங்களும் உள்ளன. எனவே, $f(x)=0$-ல் அதிக பட்சம் 2 கூட்டு மெய் மூலங்களும், அதிக பட்சம் 2 குறை மெய் மூலங்களும் தான் உள்ளன. சமன்பாட்டின் படி ஆறு. எனவே, இச்சமன்பாட்டில் குறைந்த பட்சம் இரண்டு கற்பனை மூலங்களாவது உள்ளன. ($\because$ சமன்பாட்டிற்குப் பூச்சியம் மூலமாக இல்லை.)

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$2x^7 - x^4 + 4x^3 - 5 = 0$-க்குக் குறைந்தது நான்கு கற்பனை மூலங்களேனும் உள்ளன என நிரூபிக்க.

$$f(x) = 2x^7 - x^4 + 4x^3 - 5 \text{ எனக் கொள்க.}$$

$f(x)$-ல் மூன்று குறி மாற்றங்கள் இருப்பதால் $f(x) = 0$-ல் மூன்றுக்கு மேற்பட்ட கூட்டு மெய் மூலங்கள் இருக்க முடியாது. மேலும் $f(-x) = -2x^7 - x^4 - 4x^3 - 5$. இதில் குறிமாற்றங்களே இல்லை. எனவே, $f(x) = 0$-ல் குறை மெய் மூலங்களே இருக்க முடியாது. சமன்பாட்டிற்குப் பூச்சியம், மூலமாக இல்லை. மேலும் சமன்பாட்டின் படி ஏழு. சமன்பாட்டின் மெய் மூலங்களின் அதிக பட்ச எண்ணிக்கை 3 ஆதலால், அதன் கற்பனை மூலங்களின் எண்ணிக்கை, குறைந்தது 4 ஆகும்.

2·25. 'ரோல்' தேற்றம் 11 (Rolle's Theorem)

$f(x)=0$-ன் a, b என்ற அடுத்தடுத்த மெய் மூலங்களுக்கு இடையில் $f'(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒற்றைப்படை எண்ணிக்கையுள்ள தீர்வுகள் உள்ளன; குறைந்தது ஒரு தீர்வேனும் உண்டு. [Between two consecutive real roots a and b of the equation $f(x)=0$, there lies an odd number of real roots of $f(x)=0$; there is at least one real root of $f'(x)=0$ between a and b].

தெரிப்பு :

m, n கூட்டு முழு எண்களாயின்,

$f(x) = (x-a)^m\ (x-b)^n\ \phi(x)$ எனக் கொள்வோம். இங்கு $\phi(x)$-க்கு a, b க்கிடையில் ஒரு மெய்யெண் தீர்வும் இருக்க முடியாது. ஏனெனில் அவ்வாறு ஒரு தீர்வு இருக்குமெனில் அது $f(x)=0$-க்கும் தீர்வாகும். ஆனால், a, b-க்கு இடையில் $f(x)=0$-க்கு வேறு தீர்வுகள் இல்லை எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மேலும், $\phi(a) \neq 0$, $\phi(b) \neq 0$. $\phi(x)$-ன் குறி $a \leqslant x \leqslant b$ என்ற இடைவெளியில் முழுவதும் ஒன்றேயாக இருக்க வேண்டும். அவ்வாறன்றி $\phi(x)$-ன் குறி இந்த இடைவெளியில் மாறுபடுமெனில் $\phi(x)=0$-க்கு a. b-க்கு இடையில் ஒரு மூலம் இருக்கும். இந்த மூலம் $f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கும் மூலமாக அமையும். ஆனால் கொள்கைப்படி இது ஒவ்வாது.

இப்பொழுது $f(x) = (x-a)^m\ (x-b)^n\ \phi(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= m\,(x-a)^{m-1}\ (x-b)^n\ \phi(x) \\ &\quad + n\,(x-b)^{n-1}\ (x-a)^m\ \phi(x) \\ &\quad + (x-a)^m\ (x-b)^n\ \phi'(x) \\ &= (x-a)^{m-1}\ (x-b)^{n-1}\ [\ \{m\,(x-b) \\ &\quad + n\,(x-a)\}\ \phi(x) + (x-a)\,(x-b)\,\phi'(x)\ ] \end{aligned}$$

அதாவது,

$f'(x) = (x-a)^{m-1}\ (x-b)^{n-1}\ F(x)$ என எழுதினால்,

$$\begin{aligned} F(x) &= m\,(x-b) + \phi(x) + n\,(x-a)\,\phi(x) \\ &\quad + (x-a)\,(x-b)\,\phi'(x) \text{ ஆகும்.} \\ F(a) &= m\,(a-b)\,\phi(a) \\ F(b) &= n\,(b-a)\,\phi(b) \\ &= -\,n(a-b)\,\phi(b) \end{aligned}$$

$\phi(a)$, $\phi(b)$-இவை ஒரே குறியைக் கொண்டு இருப்பதால்,

$F(a)$, $F(b)$ ஒன்றுக்கொன்று மாற்றுக் குறியைக் கொண்டு இருக்கும். எனவே, a, b - இவற்றிற்கிடையே $F(x) = 0$-க்கு ஒற்றைப்படை எண்ணிக்கையுள்ள மூலங்கள் உள்ளன. ஆகவே $f'(x) = 0$-க்கும் a, b-க்கு இடையில் ஒற்றைப்படை எண்ணிக்கையுள்ள மெய்யெண் மூலங்கள் உள்ளன.

கிளைத்தேற்றம் 1 :

$f'(x) = 0$-ன் எல்லா மூலங்களுமே மெய் எண்கள் எனில் $f'(x) = 0$-ன் மூலங்களும் மெய்யெண்களாகும்.

ஏனெனில் $f(x) = 0$-ல் $f(x)$, n-படி பல்லுறுப்புக்கோவை எனில் $f'(x) = 0$-ல் $f'(x)$, $(n-1)$ படி பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். எனவே $f(x) = 0$-ன் n மூலங்களுக்கிடையேயுள்ள $(n-1)$ இடைவெளிகள் ஒவ்வொன்றிலும் $f'(x) = 0$-ன் $(n-1)$ மூலங்களில் ஒன்று அமைந்திருக்கும்.

கிளைத்தேற்றம் 2 :

$f(x) = 0$-ன் எல்லா மூலங்களும் மெய்யெண் மதிப்புடையவை எனில், $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 0$ என்பவற்றின் எல்லா மூலங்களும் மெய்யெண்களாகும்.

கிளைத்தேற்றம் 3 :

$f'(x) = 0$-ன் அடுத்தடுத்த இரண்டு மெய் மூலங்களுக்கிடையில் $f(x) = 0$-க்கு ஒரே ஒரு மூலம்தான் இருக்க முடியும்.

கிளைத்தேற்றம் 4 :

$f'(x) = 0$-ன் மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கை r எனில், $f(x) = 0$-ன் மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கை $(r+1)$-க்கு அதிகமாயிராது.

கிளைத்தேற்றம் 5 :

$f'(x) = 0$-க்கு எத்தனை கற்பனை மூலங்கள் உள்ளனவோ குறைந்த பட்சம் அத்தனை கற்பனை மூலங்களேனும் $f(x) = 0$ பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^5 - 6x^2 - 4x + 5 = 0$-ன் மூலங்களின் தன்மையைக் காண்க.

இச் சமன்பாட்டின் உறுப்புகளின் குறிகள் $+ - - +$ என அமைந்துள்ளன. இதில் இரண்டு குறிமாற்றங்கள் வருவதால் சமன்பாட்டிற்கு இரண்டிற்கு மேற்பட்ட கூட்டு மெய் மூலங்கள் இருக்க முடியாது. மேலும் xஐ $-x$ என மாற்றியமைத்தால் சமன்பாடு $-x^5 - 6x^2 + 4x + 5 = 0$ அதாவது $x^5 + 6x^2 - 4x - 5 = 0$ என மாறுகிறது. இதில் வரும் உறுப்புகளின் குறிகள் $+ + - -$ என அமைந்துள்ளதால் குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை ஒன்று. எனவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு குறை மெய் மூலம் தான் இருக்க முடியும். ஆகவே, சமன்பாட்டிற்கு மூன்றிற்கு மேல் மெய் மூலங்கள் இருக்க முடியாது. மேலும் சமன்பாட்டின் படி 5 ஆதலால் இரண்டு கற்பனை மூலங்களேனும் இச் சமன்பாட்டிற்கு உண்டு.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	∞
x^5-6x^2-4x+5	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$

மேற்குறித்த மதிப்புகளிலிருந்து கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டிற்கு -2, -1 என்பவற்றிற்கிடையில் ஒரு குறை மெய் மூலமும், 0, 1 இவற்றிற்கிடையிலும், 1, 2 இவற்றிற்கிடையிலுமாக இரு கூட்டு மெய்மூலங்கள் உள்ளன எனவும் அறிகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு ;

$$\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n-1}+\dots+\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_n}{1}=0$$

எனில்,

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n=0$$

என்ற சமன்பாட்டிற்கு 0, 1 இவற்றிற்கிடையே குறைந்தது ஒரு மூலமாவது இருக்க வேண்டும் என நிரூபிக்க.

$$\frac{a_0x^{n+1}}{n+1}+\frac{a_1x^n}{n}+\frac{a_2x^{n-1}}{n-1}+\dots+\frac{a_{n-1}x^2}{2}+\frac{a_nx}{1}=0$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதை $f(x)=0$ எனக் கொண்டால்

$f(0)=0$ ஆகும்.

மேலும்,

$$f(1)=\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n-1}+\dots+\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_1}{1}$$

$=0$ (தரவு)

$f(0)=0$, $f(1)=0$ ஆதலால், 'ரோல்' தேற்றத்தின் படி 0, 1-க்கிடையில் $f'(x)=0$-க்கு ஒரு மூலமாவது இருத்தல் வேண்டும்.

ஆனால்,

$$f'(x) = \frac{a_0}{n+1}\,(n+1)x^n + \frac{a_1}{n}\cdot nx^{n-1} + \frac{a_2}{n-1}\,(n-1)x^{n-2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2}\cdot 2x + a_n$$

$$= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

எனவே 0, 1-க்கிடையே

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$-க்கு ஒரு மூலமேனும் இருத்தல் வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$3x^4+8x^3-6x^2-24x+r=0$-ல் $-13 < r < -8$ எனில் நான்கு மூலங்களும் மெய்யெண்கள் எனவும் $-8 < r < 19$ எனில் இரு மூலங்கள் மெய்யெண்கள் எனவும் $r > 19$ எனில் மெய் மூலங்களே கிடையாது எனவும் நிறுவுக.

$f(x) = 3x^4+8x^3-6x^2-24x+r$ என இருக்கட்டும்

$$\therefore\ f'(x) = 12x^3+24x^2-12x-24$$

$$= 12\,(x^3+2x^2-x-2)$$

$$= 12\,(x+2)\,(x+1)\,(x-1)$$

எனவே, $f'(x)=0$-ன் மூலங்கள் $-2,\ -1,\ 1$ ஆகும்.

x	$-\infty$	-2	-1	1	∞
$f(x)$	+	$8+r$	$13+r$	$r-19$	+

$f(x)=0$-ன் நான்கு மூலங்களும் மெய்யெண்கள் எனில், $f'(x)=0$-ன் மூலங்கள் $f(x)=0$-ன் மூலங்களுக்கிடையே அமைந்திருக்கும். $f'(x)=0$-ன் மூலங்கள் $-2,\ -1,\ 1$ ஆதலால் $f(x)=0$-ன் மூலங்கள் $(-\infty,\ -2)$ $(-2,\ -1)$, $(1,\ \infty)$ என்ற எல்லைகளுக்கு இடையே இருத்தல் வேண்டும்.

$f(-\infty) > 0$. எனவே $f(-2) < 0$

அதாவது $8+r<0$ $\quad\therefore\ r<-8$

$13+r>0$ $\quad\therefore\ r>-13$

$r-19<0$ $\quad\therefore\ r<+19$

எனவே, $-13<r<-8$ எனில், $f(x)=0$-ன் நான்கு மூலங்களுமே மெய்யெண்கள்.

$-8<r<19$ எனில் $r+8>0$, $r-19<0$.

அதாவது, $f(-2)>0$, $f(1)<0$ மேலும் $f(+\infty)>0$.

எனவே, $f(x)=0$-ல் -2, 1-க்கிடையே ஒரு மூலமும் 1, $+\infty$-க்கிடையே ஒரு மூலமுமாக இரண்டு மெய் மூலங்கள் உண்டு.

(iii) $f(x)=0$-க்கு மெய் மூலங்களே இல்லையெனில் x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f(x)$ ஒரே குறியைப் பெற்றிருத்தல் வேண்டும். $f(-\infty)>0$, $f(+\infty)>0$ ஆதலின் x-ன் மற்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f(x)>0$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned} 8+r&>0 & \therefore\ r&>-8\\ 13+r&>0 & \therefore\ r&>-13\\ r-19&>0 & \therefore\ r&>19\end{aligned}\right\}$$

$\therefore\ r>19$ என இருப்பின் $f(x)=0$-ன் மூலங்கள் யாவும் கற்பனையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^3+px+q=0$-ன் மூலங்களின் வேறுபாடுகளின் இருபடிகளை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க. இதிலிருந்து கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களும் மெய் மதிப்புக் கொள்வதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க.

$x^3+px+q=0$-ன் மூலங்கள் $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ என இருக்கட்டும்.

$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma=0,\ \ \alpha\beta\gamma=-q$

$$(\beta-\gamma)^2=(\beta+\gamma)^2-4\beta\gamma$$

$$=\alpha^2-\frac{4\beta\alpha\gamma}{\alpha}$$

$$=\alpha^2+\frac{4q}{\alpha}$$

$\therefore \quad (\alpha-\beta)^2, (\beta-\gamma)^2, (\gamma-\alpha)^2$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண xஐ,

$$x^3 + px + q = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$y = x^2 + \frac{4q}{x} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இவற்றிலிருந்து விலக்க வேண்டும்.

(2) இலிருந்து $\quad x^3 = xy - 4q$

(1) இலிருந்து $\quad x^3 = -px - q$

$$\therefore \quad xy - 4q = -px - q$$
$$x(y+p) = 3q$$

$$\therefore \quad x = \frac{3q}{y+p}$$

எனவே, $(\beta-\gamma)^2, (\gamma-\alpha^2), (\alpha-\beta)^2$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு,

$$\frac{27q^3}{(y+p)^3} + \frac{3pq}{y+p} + q = 0$$

அதாவது, $\quad q(y+p)^3 + 3pq(y+p)^2 + 27q^3 = 0$

$$\phi(y) \equiv y^3 + 6py^2 + 9p^2y + 4p^3 + 27q^2 = 0$$

$(\alpha-\beta)^2 (\beta-\gamma)^2 (\gamma-\alpha)^2$ என்பது $\phi(y) = 0$-ன் மூலங்களின் பெருக்குத் தொகையாகும்.

$$\therefore \quad (\alpha-\beta)^2 (\beta-\gamma)^2 (\gamma-\alpha)^2 = -(4p^3 + 27q^2)$$

α, β, γ — இவை எல்லாம் மெய் மதிப்புடையவை எனில்,

$(\alpha-\beta)^2 \; (\beta-\gamma)^2 \; (\gamma-\alpha)^2$ கூட்டு மதிப்புடையதாயிருத்தல் வேண்டும்.

$\therefore \quad (4p^3 + 27q^2)$ குறை மதிப்புடையதாதல் வேண்டும்.

$$\phi(0) \quad = 4p^3 + 27q^2 < 0$$

$$\phi(-p) \quad = -p^3 + 6p^3 - 9p^3 + 4p^3 + 27q^2$$

$$= 27q^2 > 0$$

$$\phi(-3p) = -27p^3+54p^3-27p^3+4p^3+27q^2$$
$$= 4p^3+27q^2 < 0$$
$$\phi(\infty) > 0.$$

எனவே, $\phi(y)=0$-ன் மூலங்கள் $(0, -p)$, $(-p, -3p)$ $(-3p, +\infty)$ என்பவற்றிற்கிடையே அமைந்திருக்க வேண்டும்.

p குறை மதிப்புடையதாயிருப்பதால், $-p$, $-3p$ ஆகிய இரண்டும் கூட்டு மதிப்புடையனவாயிருக்க வேண்டும்.

$\therefore$ $\phi(y)=0$-ன் மூலங்கள் யாவுமே கூட்டு மதிப்புடையவை. எனவே, $f(x)=0$-ன் மூலங்கள் எல்லாம் மெய் மதிப்புடையவை. எனவே, $x^3+px+q=0$-ன் மூலங்கள் யாவும் மெய் மதிப்பு பெற்றிருப்பதற்கான தேவையான, போதுமான நிபந்தனை $(4p^3+27q^2)$ குறை மதிப்புடையதாயிருப்பதே ஆகும்.

பயிற்சி 2 (i)

1. $x^6-x^5+3x^4+4x-1=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குக் குறைந்தது இரண்டு கற்பனை மூலங்கள் உண்டு என்று நிறுவுக.

2. $f(x)$ ஆனது x-ன் இரட்டைப்படை எண் படிகளில் ஆன, ஒரே குறியை உள்ள கெழுக்களைக் கொண்டிருந்தால், $f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மெய்யான மூலங்கள் இல்லை என்று நிரூபி.

3. $f(x)$-க்கு x-ன் ஒற்றைப் படை எண்ணுல் ஆன படிகளைக் கொண்ட ஒரே குறியை உள்ள கெழுக்களைக் கொண்டிருந்தால் $f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $x=0$ தவிர வேறு மெய்யான மூலங்கள் இல்லை என்று நிரூபி.

4. $x^{2n+1}+3x^5+4x-8=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு கூட்டு மெய்யான மூலமும், $2n$ கற்பனை மூலங்களும் உண்டு எனக் காட்டு.

5. $3x^5-2x^3-4x+2=0$-க்கு மூன்று மெய் மூலங்களும், இரண்டு கற்பனை மூலங்களும் உண்டு என்று காட்டு.

6. $x^7-3x^4+2x^3-1=0$-க்குக் குறைந்தது நான்கு கற்பனை மூலங்கள் உண்டு என்று நிரூபி.

7. $x^6+3x^2-5x+1=0$-க்குக் குறைந்தது நான்கு கற்பனை மூலங்கள் உண்டு என்று நிரூபி.

8. $x^7-x^5-x^4-6x^2+7=0$-ல் எத்தனை மெய்யான மூலங்கள் உள்ளன ?

9. $12x^7-x^4+10x^3-28=0$-க்குக் குறைந்தது நான்கு கற்பனை மூலங்கள் உண்டு என நிறுவுக.

10. மூலங்களின் தன்மையைக் காண்க :

(1) $4x^3-21x^2+18x+20=0$.

(2) $2x^3-9x^2+12x+3=0$.

(3) $x^4+4x^3-20x^2+10=0$.

11. $f(x)=(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3$-க்கு ஒரு மெய் மூலமும், இரண்டு கற்பனை மூலங்களும் உண்டு என்று காட்டு.

12. $x^3-3x+c=0$ க்கு எல்லா மூலங்களும் மெய்யானுல், c-ன் எல்லை யாது ?

13. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளில் k-ன் எல்லை மதிப்பைக் காண்க :

(1) $x^3+4x^2+5x+2+k=0$

(2) $2x^3-9x^2+12x-k=0$

(3) $3x^4-4x^3-12x^2+k=0$.

14 a_1, a_2, a_3, a_4 என்பவைகள் மெய்யெண்களாகில்,

$$\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\frac{1}{x-a_3}+\frac{1}{x-a_4}=0\text{-ன்}$$

மூலங்களும் மெய்யானவை என்று காட்டு.

15. $1+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{4}{x}=0$-ன் மூலங்கள் மெய்யெண்கள் என்று காட்டு.

16. $x^3-7x+5=0$-ன் மூலங்கள் மெய்யெண்களே என்று நிறுவுக.

17. $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6 = 0$-ன் மூலங்களில் இரண்டு மெய் மூலங்கள், இரண்டு கற்பனை மூலங்கள் உள்ளன என்று காட்டு.

18. $17 < a < 29$ ஆனால் $x^4 - 10x^3 + ax + 6 = 0$-ன் மூலங்கள் மெய்யானவை.

2·26. பன்மடங்கு மூலங்கள் (Multiple Roots)

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் r மூலங்கள் சமமெனில் (α என்க), α, $f(x) = 0$-ன் r மடங்கு மூலம் ஆகும். எனவே, $f(x) = (x-\alpha)^r \phi(x)$ என்ற முறையில் இருக்கும்.

இங்கு $\phi(\alpha) \neq 0$.

$$\therefore \quad f'(x) = r(x-\alpha)^{r-1}\phi(x) + (x-\alpha)^r \phi'(x)$$
$$= (x-\alpha)^{r-1}[r\phi(x) + (x-\alpha)\phi'(x)]$$

$x = \alpha$ என இருக்கும்போது

$$r\phi(x) + (x-\alpha)\phi'(x) = r\phi(\alpha) \neq 0.$$

$\therefore$ $(x-\alpha)$, $[r\phi(x) + (x-\alpha)\phi'(x)]$-ன் ஒரு காரணி அல்ல.

எனவே $f'(x) = (x-\alpha)^{r-1}[r\phi(x) + (x-\alpha)\phi'(x)] = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு, α, $(r-1)$ மடங்கு மூலமாகும்.

கிளைத்தேற்றம் :

(i) $f'(x) = 0$-ல் α, $(r-1)$ மடங்கு மூலமாதலால்,

$f''(x) = 0$-ல் α, $(r-2)$ மடங்கு மூலமாகும்,

$\therefore$ $f'''(x) = 0$-ல் α, $(r-3)$ மடங்கு மூலமாகும்,

... ...

$f^{r-1}(x) = 0$-ல் α, ஒரு மூலமாகும்.

எனவே, மறுதலையாக α, $f^{r-1}(x) = 0$-ன் ஒரே ஒரு முறை அமைந்த மூலமாகவும் $f(x) = 0$-ன் மூலமாகவும் அமைந்தால், அது $f(x) = 0$-ன் r மடங்கு மூலமாகும்.

(ii) $f(x)$, $f'(x)$ ஆகியவற்றின் மிகப் பெரிய பொதுக் காரணியில் இருந்து $f(x) = 0$-ன் பன்மடங்கு மூலங்களைக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

எனவே,

(i) $f''(x)$ ஐக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(ii) $f(x)$, $f'(x)$ - இவற்றின் மிகப் பெரிய பொதுக்காரணி காணவும்,

(iii) இப் பொதுக் காரணியின் ஒவ்வொரு வேறுபட்ட காரணியும் $f(x)=0$-ன் ஒவ்வொரு பன்மடங்கு மூலத்திற்குரிய காரணியாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^5-3x^4-5x^3+27x^2-32x+12=0$, மடங்குத் தீர்வுகள் உடையது எனில், இச்சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

இங்கு, $f(x) = x^5-3x^4-5x^3+27x^2-32x+12$

$\therefore \quad f'(x) = 5x^4-12x^3-15x^2+54x-32$

$f(1) = 0 \qquad f'(1)=0$

$f(2) = 0 \qquad f'(2)=0.$

$\therefore \quad x=1,\ x=2$ என்பவை ஒவ்வொன்றும் $f(x)=0$-ன் இரு மடங்குத் தீர்வுகள்.

$\therefore \quad f(x) = (x-1)^2(x-2)^2(x-\alpha)$ எனக் கொள்க.

$= x^5-3x^4-5x^3+27x^2-32x+12$

இரு புறமும் நிலையெண் உறுப்புகளைச் சமப்படுத்த,

$-4\alpha = 12 \qquad \therefore \quad \alpha = -3.$

$\therefore$ கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $1,\ 1,\ 2,\ 2,\ -3$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$2x^4-12x^3+19x^2-6x+9=0$, மடங்குத் தீர்வுகள் உடையது எனில், இச்சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

இங்கு $f(x)=2x^4-12x^3+19x^2-6x+9$

$f'(x) = 8x^3-36x^2+38x-6.$

$f(x)$, $f'(x)$-க்கு இடையேயுள்ள மிகப் பெரிய பொதுக் காரணியைக் கீழ்க்கண்ட முறையில் காண்போம்.

	$(2x^4-12x^3+19x^2-6x+9)\times 4$	$(8x^3-36x^2+38x-6)\times 4$	
x	$8x^4-48x^3+76x^2-24x+36$	$32x^3-144x^2+152x-24$	$-x$
	$8x^4-36x^3+38x^2-6x$	$32x^3-78x^2-54x$	
	$(-12x^3+38x^2-18x+36)\times 2$	$(-66x^2+206x-24)\times 16$	
-3	$-24x^3+76x^2-36x+72$	$-1506x^2+3296x-384$	33
	$-24x^3+108x^2-114x+18$	$-1056x^2+2574x+1782$	
$-32x$	$-32x^2+78x+54$	$722(x-3)$	
-18	$-32x^2+96x$		
	$-18x+54$		
	$-28x+54$		

$\therefore$ $f(x)$, $f'(x)$-ன் மிகப் பெரிய பொதுக் காரணி $(x-3)$.

$\therefore$ $(x-3)^2$, $f(x)$-ன் ஒரு காரணி.

$(2x^4-12x^3+19x^2-6x+9)$ஐ $(x-3)^2$ ஆல் வகுப்போம்.

3	2	-12	19	-6	9
		6	-18	3	-9
		-6	1	-3	0
		6	0	3	
		0	1	0	

$\therefore$ $(2x^2+1)$ ஈவு ஆகும்.

எனவே கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மற்ற இரு மூலங்களும் $2x^2+1=0$-ன் மூலங்களாகும். அதாவது $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$.

$\therefore$ சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$, 3, 3 ஆகும்.

பயிற்சி 2 (j)

1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளுக்குப் பன்மடங்கான மூலங்களைக் காண்க :

(1) $4x^4+24x^3+49x^2+45x+25=0$.

(2) $4x^3-12x^2-15x-4=0$

(3) $x^4-6x^3+13x^2-24x+36=0$.

(4) $8x^3-20x^2+6x+9=0$.

(5) $x^5-x^4-4x^2+7x-3=0$.

(6) $27x^4-72x^2+64x-16=0$.

(7) $12x^3+40x^2+39x+9=0$.

(8) $x^3+x^2-16x+20=0$.

(9) $x^4-2x^3-11x^2+12x+36=0$

(10) $x^5-3x^4-6x^3-10x^2+21x+9=0$.

2. $x^3+4x^2+5x+2+k=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு மூலங்கள் சமமானால் k-ன் மதிப்பு என்ன ?

3. $x^3-3qx+2r=0$-ன் இரண்டு மூலங்கள் சமமானால் $q^3=r^2$ என்று காட்டு.

4. $x^n=p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\dots+p_{n-1}x+p_n=0$-க்கு இரண்டு மூலங்கள் α ஆனால், $p_1x^{n-1}+2p_2x^{n-2}+3p_3x^{n-3}\dots\dots\dots+np_n=0$ என்று காட்டுக.

5. $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\dots\dots+p_n=0$-க்கு மூன்று மூலங்கள் α ஆனால் $n^2x^{n-1}+(n-1)^2p_1x^{n-2}+\dots+p_{n-1}=0$ என்று நிறுவுக.

6. $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூன்று மூலங்கள் சமமானால், ஒவ்வொன்றும் $\dfrac{6c-ab}{3a^2-8b}$ என்று நிறுவுக.

7. $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$-என்ற சமன்பாட்டின் இரண்டு மூலங்கள் சமமானல் ஒவ்வொன்றும் $\dfrac{bc-ad}{2(ac-b^2)}$ என்று காட்டு.

8. $x^5 - 90\, a^3x^2 + b^4x + c^5 = 0$-ன் மூன்று மூலங்கள் சமமானல், $ab^4 - 9a^5 + c^5 = 0$ என்று நிருபி.

9. $x^4 + px^2 + q = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மூன்று சமமான மூலங்கள் இருக்க முடியாது என்று காட்டுக.

2·2. ஸ்டர்ம் தேற்றம் 12 : (Sturm's Theorem)

$f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் யாவும் ஒன்றுக் கொன்று வேறுபட்டவையாயிருக்கட்டும். $f(x)$-ன் முதல் வகைக் கெழுச் சார்பு $f^1(x)$ எனக் கொள்வோம். $f(x)$ ஐ $f_1(x)$ ஆல் வகுத்தால் வரும் மீதி $-f_2(x)$ என இருக்கட்டும். $f^1(x)$ ஐ $f_2(x)$ ஆல் வகுத்து வரும் மீதி $-f_3(x)$ எனவும், $f_2(x)$ ஐ $f_3(x)$ ஆல் வகுத்து வரும் மீதி $-f_4(x)$ எனவும் கொண்டு இவ்வாறு அடுத்தடுத்து வகுத்துச் சென்றுல் இறுதியாகக் கிடைக்கும் சார்பு $(=-f_m(x)$ என்க.) ஒரு மாறிலியாகும். $f(x)\, f^1(x),\, f_2(x) \ldots f_m(x)$. இவை ஸ்டர்ம் சார்புகள் எனப்படும்.

$f(x)$-ன் 'ஸ்டர்ம்' சார்புகளில் $x=a$ எனப் பிரதியிடுவதால் கிடைக்கும் குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கைக்கும், இச்சார்புகளில் $x=b$ எனப் பிரதியிடுவதால் ஏற்படும் குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கைக்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாடு, a, bக்கு இடையே $f(x) = 0$-க்கு அமைந்த மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகும்.

குறிப்பு: $0, \infty$ என 'ஸ்டர்ம்' சார்புகளில் பிரதியிடுகையில் கிடைக்கும் குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையின் வேறுபாடு சமன்பாட்டின் கூட்டு மெய் மூலங்களைக் குறிக்கும்.

$-\infty$, 0 என்று 'ஸ்டர்ம்' சார்புகளில் பிரதியிடுவதால் கிடைக்கும் குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையின் வேறுபாடு சமன்பாட்டின் குறை மெய் மூலங்களைக் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^3-7x+7=0$-ன் மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கையையும் அவற்றின் இருப்பிடத்தையும் காண்க.

$$f(x) = x^3-7x+7$$
$$f^1(x) = 3x^2-7$$
$$f_2(x) = 2x-3 \qquad f_3(x) = 1$$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை
$(-\infty)$	−	+	−	+	3
0	+	−	−	+	2
$+\infty$	+	+	+	+	0

∴ சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் குறை மதிப்புடையது. மற்ற இரண்டும் கூட்டு மெய்யெண்கள்.

மேலும்

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை
−4	−	+	−	+	3
−3	+	+	−	+	2
−2	+	+	−	+	2
−1	+	−	−	+	2
1	+	−	−	+	2
2	+	+	+	+	0

∴ $f(x)=0$-ன் குறை மூலம் -4, -3-க்கு இடையிலும் கூட்டு மெய்மூலங்கள் 1, 2-க்கிடையிலும் அமைந்து உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^3-3x+1=0$-ன் மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கையையும் அவற்றின் இருப்பிடத்தையும் காண்க.

'ஸ்டர்ம்' சார்புகளைக் கீழ்க்கண்ட முறையில் கண்டுபிடிக் கிறோம்.

x	$f(x) = x^3-3x+1$ x^3-x $-2x+1$ குறி மாற்றியமைக்க, $f(x) = 2x-1$	$f_1(x) = 3x^2-3$ மூன்றால் வகுக்கக் கிடைப்பது x^2-1 $\times 2$ $2x^2-2$ $2x^2-x$ $x-2$ $\times 2$ $2x-4$ $2x-1$ -3 குறி மாற்றி அமைக்க, $f_3(x)=3$	x 1

$$\therefore \quad f(x) = x^3-3x+1$$

$$f_1(x) = x^2-1$$

$$f_2(x) = 2x-1$$

$$f_3(x) = 3$$

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

எனவே, சமன்பாட்டின் மூலங்கள் யாவும் மெய்யெண் களாகும்.

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை.
-2	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-1	$+$	0	$-$	$+$	2
0	$+$	$-$	$-$	$+$	2
1	$-$	0	$+$	$+$	1
2	$+$	$+$	$+$	$+$	0

எனவே மூலங்கள் $(-2, -1)$, $(0, 1)$ $(1, 2)$ என்பவற்றிற் கிடையே அமைந்திருக்கும்.

குறிப்பு :

சமன்பாட்டின் மூலங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண 'ஸ்டர்ம்' சார்புகளின் குறியே தேவையாயிருப்பதால் இச்சார்பு களைக் கூட்டு மதிப்புடைய நிலையெண்களால் பெருக்கியோ வகுத்தோ கொள்ளலாம்.

பயிற்சி 2 (k)

1. $x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களும் கற்பனையானவை என்றுகாட்டு.

2. $x^3 + 3p\,x^2 + 3q\,x + r = 0$-ல் $p^2 < q$ ஆனுல் இரண்டு மூலங்கள் கற்பனையானவை என்று நிரூபி.

3. $x^3 - 3x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு எத்தனை மெய்யான மூலங்கள் எனக் காண்க.

4. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளுக்கு எத்தனை மெய்யான மூலங்கள் உண்டு என்று காண்க.

   (i) $x^5 - 5x + 1 = 0$. (2) $x^3 - 7x + 7 = 0$

5. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளுக்கு எத்தனை மெய்யான மூலங்கள் உண்டென்றும், அவைகள் அமை யும் இடைவெளிகளையும் காண்க.

(1) $x^3 - x^2 - 10x + 1 = 0$

(2) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 10x - 4 = 0.$

(3) $x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x - 2 = 0.$

2·28. எண்சார் தீர்வு (Numerical Solution)

$x^4 - 9x^2 + 3x - 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைப் போன்று எண்களைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட சமன்பாடுகள் எண்சார் சமன்பாடுகள் (Numerical Equation) எனப்படும். இத்தகைய சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் மெய்யெண்களாகவோ கற்பனையாகவோ இருக்கலாம். மெய்யெண் மூலங்களில் சில பொது அளவுள்ளனவாகவும் இருக்கலாம்; மற்றவை பொது அளவற்றனவாகவும் இருக்கலாம். இவ்வாறு அமைந்த மூலங்களைக் காண்பதற்கான சில வழி முறைகளை அடுத்து வரும் பகுதியில் விளக்குவோம்.

தேற்றம் 13:

ஒரு n படித்தான சமன்பாட்டில் x^n-ன் கெழு ஒன்றுகவும், கெழுக்கள் முழு எண்களாகவும் இருப்பின் அச்சமன்பாட்டிற்கு அளவுக்கிணங்கிய தீர்வுகள் இருப்பின் அவை முழு எண்களாயிருக்கும். மேலும் அவை யாவும் சமன்பாட்டின் தனி உறுப்பின் காரணிகளாக இருக்கும்.

தெரிப்பு:

$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$ ($p_1, p_2, \dots, p_n$ என்பவை முழு எண்கள்) என்ற சமன்பாட்டிற்கு, முடியுமெனில் $\frac{a}{b}$ ஓர் அளவுக்கிணங்கிய மூலமாக இருக்கட்டும். (a, b என்பவற்றில் கிடையே ஒன்றைத் தவிர பொதுக் காரணி கிடையாது.)

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right) + p_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + p_2\left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \dots + p_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right) + p_n = 0$$

$$\therefore a^n + p_1 a^{n-1}b + p_2 a^{n-2}b^2 + \dots + p_{n-1} ab^{n-1} + p_n b^n = 0$$

$$\therefore \frac{a^n}{b} = -(p_1 a^{n-1} + p_2 a^{n-2}b + \dots + p_{n-1} ab^{n-2} + p_n b^{n-1})$$

= ஒரு முழு எண்.

ஆனல் a, b என்பவை ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள் (prime numbers)

ஆதலால் $\frac{a^n}{b}$ ஒரு பின்னம்.

ஆனல் ஒரு பின்னம் ஒரு முழு எண்ணிற்குச் சமமாயிருக்க இயலாது. ஆதலின் $\frac{a}{b}$ கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டிற்கு மூலமாக இருக்க முடியாது. எனவே சமன்பாட்டிற்கு அளவுக்கிணங்கிய மூலங்கள் இருப்பின் அவை முழு எண்களாகத்தான் இருக்க வேண்டும். இந்நிலையில் α ஒரு முழு எண் தீர்வாக இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad \alpha^n + p_1\alpha^{n-1} + p_2\alpha^{n-2} + \dots\dots + p^{n-1}\alpha + p^n = 0$$

முழுவதும் α ஆல் வகுத்தால்,

$$\alpha^{n-1} + p_1\alpha^{n-2} + \dots\dots + p_{n-1} + \frac{p^n}{\alpha} = 0$$

$$\therefore \frac{p^n}{\alpha} = -(\alpha^{n-1} + p_1\alpha^{n-2} + \dots + p_{n-1})$$

$=$ ஒரு முழு எண்.

$\therefore \frac{p^n}{\alpha}$-ம் ஒரு முழு எண்ணுயிருக்க வேண்டும். எனவே α, p_n-ன் ஒரு காரணியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x - 2 = 0$-ல் அளவுக்கிணங்கிய மூலங்கள் உண்டெனில் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x - 2$ எனக் கொள்க.

$f(x) = 0$-ன் அளவுக்கிணங்கிய மூலங்கள் முழு எண்ளாயிருக்கும். மேலும் அவை -2-ன் காரணிகளாயிருக்கும்.

-2-ன் காரணிகள், $\pm 1, \pm 2$.

$f(1) = 0;\ f(2) = 0;\ f(-1) \neq 0$.

$\therefore (x-1), (x-2)$ என்பவை $f(x)$-ன் காரணிகள்.

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & -4 & 4 & 1 & -2 \\
2 & & \frac{1}{-3} & \frac{-3}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{0} \\
 & & \frac{2}{-1} & \frac{-2}{-1} & \frac{-2}{0} &
\end{array}$$

$f(x)$ ஐ $(x-1)(x-2)$ ஆல் வகுத்து வரும் ஈவு x^2-x-1

$x^2-x-1=0$-ன் தீர்வு கண்டால்

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $1,\ 2,\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

பயிற்சி 2 (1)

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளுக்கு அளவுக்கிணங்கிய மூலங்கள் இருக்குமானால், அவற்றின் தீர்வு காண்க.

1. $x^3-5x^2-18x+72=0$
2. $x^4-39x^2+46x-168=0$.
3. $x^4-2x^3-19x^2+68x-60=0$
4. $x^6-12x^4+25x^3-48x^2-26x+60=0$
5. $2x^3-31x^2+112x+64=0$
6. $2x^4+x^3-2x^2-4x-3=0$
7. $96x^3-16x^2-6x+1=0$.
8. $x^4-4x^3+4x^2+x-2=0$-ன் தீர்வு காண்க.
9. $3x^4-23x^3+35x^2+31x-30=0$ என்ற சமன்பாட்டின் முழு எண்களாலான மூலங்கள் இரண்டு மூலங்களுக்கும் அதிகமானால், அதன் தீர்வைக் காண்க.
10. $2x^5-7x^4+6x^3-11x^2+4x+6=0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரண்டு மூலங்கள் முழு எண்களாயிருப்பின், அதன் தீர்வைக் காண்க.

22·9. எண்சார் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் : (தோராயத் தீர்வுகள்) (Apporximate Solutions)

ஹார்னர் முறை :

இம்முறையில் சமன்பாட்டின் அளவுக்கிணங்கிய மூலங்கள் எல்லாவற்றின் மதிப்பையும் காணலாம். இங்கு மூலத்தின் மதிப்பைப் படிப்படியாகக் கண்டு பிடிக்கிறோம். முதலில் கூட்டு மெய்யெண் மூலம் காணும் முறையைப் பார்ப்போம்.

$f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டைக் கொள்வோம்.

(i) $f(\alpha)$, $f(\alpha+1)$ – இவை மாற்றுக் குறியீடுகள் பெறும் வகையில் α, $\alpha+1$ என இரு அடுத்தடுத்த கூட்டு முழு எண்கள் இருப்பின், $f(x)=0$-ன் ஒரு மூலம் α, $\alpha+1$-க்கிடையே அமைந்திருக்கும். அதன் முழு எண் பகுதி α ஆகும். தீர்வை $\alpha \cdot abc$ ... எனக் கொண்டால் $a\ b\ c$ ... மூலத்தின் தசம பாகத்தைக் குறிக்கும். α-ன் மதிப்பையடுத்து a, b, c ... என்பவற்றின் மதிப்புகளைப் படிப்படியாக ஒவ்வொன்றாகக் காண்கிறோம்.

(ii) இப்போது $f(x)=0$-ன் மூலங்களை α அளவு குறைத்துக் கிடைக்கும் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இவ்வாறு கிடைக்கும் சமன்பாட்டின் {$\phi(x)=0$ எனக் கொள்க} ஒரு மூலம் $\cdot abc$ ... ஆக இருக்கும். அதாவது இம்மூலம் 0, 1 - க்கிடையே இருக்கும்.

(iii) $\phi(x)=0$-ன் மூலங்களை 10 ஆல் பெருக்கி மூன்றுவதாக $f_1(x)=0$ என்ற புதிய சமன்பாடு அமைப்போம். இச்சமன் பாட்டின் ஒருமூலம் $a.bc$ ... என இருக்கும். [ஏனெனில் இச்சமன் பாட்டின் ஒவ்வொரு மூலமும் $\phi(x)=0$-ன் மூலங்களைப்போல் 10 மடங்காயிருக்கும்.] $a.bc$ ...-ன் முழு எண்பாகம் a, மேலும் a, 0, 10 இவற்றிற்கிடையே அமைந்திருக்கும். a-ன் மதிப்புக் காண $f_1(x)$-ல் 0, 10 இவற்றிற்கிடையேயுள்ள முழு எண்களின் மதிப்புகளில் அடுத்தடுத்து வரும் எந்த இரு முழு எண் மதிப்புகளுக்கு $f_1(x)$ குறி மாற்றம் அடைகிறது எனக் காணவேண்டும். இவ்வெண்களில் சிறிய எண் a ஆகும்.

(iv) இவ்வழியாகப் படிப்படியாக b, c ... ... என்பவற்றின் மதிப்புகளையும் காண்கிறோம்.

குறை மெய்யெண் மூலங்கள்

$f(x)=0$-க்கு $-\beta$ ஒரு குறை மெய்யெண் தீர்வெனில்,

$f(-x)=0$-க்கு β ஒரு கூட்டு மெய்யெண் மூலமாகும்.

எனவே, $f(x)=0$-ன் குறை மெய்யெண் மூலங்கள் காண, $f(-x)=0$-ன் கூட்டு மெய்யெண் மூலங்கள் காணுதல் வேண்டும். இதை மேற்குறித்த ஹார்னர் முறைப்படி அறியலாம். இம்மூலங்களுக்கு $-$ குறியிட, இவை $f(x)=0$-ன் குறை மெய்யெண் மூலங்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^3-3x+1=0$-ன் கூட்டு மெய் மூலத்தைக் காண்க.

$f(x)=x^3-3x+1$ எனக் கொண்டால், $f(x)$-ல் இரண்டு குறி மாற்றங்கள் இருப்பதால் $f(x)=0$-க்கு இரண்டு கூட்டு மெய் மூலங்கள் இருக்கலாம்.

$$f(0)=1 \qquad (+)$$
$$f(1)=-1 \qquad (-)$$
$$f(2)=+3 \qquad (+)$$

எனவே, $f(x)=0$-க்கு $(0, 1)$-க்கு இடையே ஒரு மூலமும், $(1, 2)$-க்கு இடையே ஒரு மூலமும் உள்ளது. முதலில் 1, 2-க் கிடையேயுள்ள மூலத்தைக் கணக்கிடுவோம். இதன் முழு எண் பாகம் 1. $\therefore$ இம்மூலத்தை $1{\cdot}abc \ldots \ldots$ எனக் கொள்வோம். $f(x)=0$-ன் மூலங்களை 1 ஆல் குறைக்கவும்.

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & 0 & -3 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & -2 \\
 & & 1 & -2 & -1 \\
 & & 1 & 2 & \\
 & & 2 & 0 & \\
 & & 1 & & \\
 & & 3 & &
\end{array}$$

மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^3+3x^2-1=0$ ஆகும்.

இதன் மூலங்களை 10ஆல் பெருக்க, கிடைக்கும் சமன்பாடு

$$x^3+30x^2-1000=0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

இதை $f_1(x)=0$ எனக் கொண்டால்

$$f_1(5)<0$$
$$f_1(6)>0$$

$\therefore$ $f_1(x)=0$-ன் ஒரு மூலம் 5, 6-க்கிடையே இருக்கும்.

$\therefore$ $a=5$

இதன் மூலங்களை 5 ஆல் குறைக்கவும்.

$$\begin{array}{r|rrrr}
5 & 1 & 30 & 0 & -1000 \\
 & & 5 & 175 & 875 \\
 & & 35 & 175 & -125 \\
 & & 5 & 200 & \\
 & & 40 & 375 & \\
 & & 5 & & \\
 & & 45 & &
\end{array}$$

மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$x^3+45x^2+375x-125 = 0$

இதன் மூலங்களை 10ஆல் பெருக்க, கிடைக்கும் சமன்பாடு

$$f_2(x) = x^3+450x^2+37500x-125000=0$$

$$f_2(3) < 0$$

$$f_2(4) > 0$$

எனவே, $f_2(x)=0$-ன் ஒரு மூலம் 3, 4-க்கிடையே இருக்கும்.

$\therefore\quad b=3.$

இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களை 3 ஆல் குறைக்கவும்.

3 |	1	450	37500	−125000
		3	1359	−116577
		453	38859	−8423
		3	1368	
		456	40227	
		3		
		459		

$\therefore$ மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^3+459x^2+40227x-8423=0$$

இதன் மூலங்களை 10 ஆல் பெருக்கக் கிடைப்பது

$$f_3(x)=x^3+4590x^2+3749100x-8423000=0$$

8423000ஐ 3749100 ஆல் வகுத்தால் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலத்தின் நான்காம் இலக்கம் 2.

$\therefore\quad c = 2$

எனவே, $f_3(x)=0$-ன் மூலங்களை 2 ஆல் குறைக்கவும்.

2 | 1	4590	4022700	−8428000
	2	9184	8068768
	4592	4031884	−359232
	2	9188	
	4594	4041072	
	2		
	4596		

$$f_4(x) = x^3 + 45960\ x^2 + 404107200\, x - 359232000 = 0.$$

$359232000 < 404107200$. ஆதலால் இதன் ஒரு மூலம் 0, 1-க்கிடையே இருக்கும்.

$\therefore \quad d = 0$

இதன் மூலங்களை 10 ஆல் பெருக்க,

$$f_5(x) = x^3 + 459600\ x^2 + 40410720000\ x - 359232000000 = 0.$$

இச்சமன்பாட்டில் $\dfrac{359232000000}{40410720000}$-ன் மதிப்பு 8, 9-க்கு இடையே இருப்பதால் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் இவற்றிற்கிடையே இருக்கும்.

$\therefore\ e = 8.$

எனவே கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் ஒரு கூட்டு மெய் மூலம் 1·53208.........ஆகும்.

இதேபோன்று, 0, 1-க்கிடையே உள்ள மூலத்தைக் காணும் முறை பின்வருமாறு :

3 | 1	0	−300	1000 (·3472
	3	9	−873
	3	−291	127000
	3	18	
	6	−27300	
	3		
	90		
	4	376	−107696
	94	−26924	19304000
	4	392	
	98	−2653200	
	4		
	1020		
	7	7189	−18522077
	1027	−2646011	781923000
	7	7238	
	1034	−263877300	
	7		
	10410		
	2	20824	−527712952
	10412	−263856476	254210048
	2	20828	
	10414	−263835648	
	2		
	10416		

எனவே $x^3 - 3x + 1 = 0$-ன் மற்றொரு மூலம் ·3472 ஆகும்.

2·30. நியூட்டன் முறை :

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலத்தின் தோராய மதிப்பு α என இருக்கட்டும். $\alpha + h$ இதன் மதிப்பு என்றால் $f(\alpha + h) = 0$.

$$\text{அதாவது, } f(\alpha) + hf'(\alpha) + \frac{h^2}{2!} f''(\alpha) + \dots \dots = 0$$

h-ன் மதிப்பு மிகவும் சிறியதாக இருந்தால் h^2, h^3, ... என்பவற்றைநீக்கி, தோராயமாக $h = -\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ என அறியலாம்.

எனவே $\alpha - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha_1$ (என்க) என்பது α ஐ விட இன்னும் சரியான தோராய மதிப்பாக இருக்கும். இம் மூலத்தின் மதிப்பை $\alpha_1 + h_1$ எனக் கொண்டால் $h_1 = -\dfrac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$ எனப் பெறலாம். இவ்வாறு அடுத்தடுத்துச் செய்வதன் மூலம், $f(x) = 0$-ன் மூலத்தின் தோராய மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^3 - 2x - 5 = 0$-ன் கூட்டு மெய்யெண் மூலத்தின் தோராய மதிப்பைக் காண்க.

$f(x) = x^3 - 2x - 5$ எனக் கொள்வோம்.

$f(2) = -1 < 0$

$f(3) = 16 > 0$

$\therefore$ $f(x) = 0$-ன் கூட்டு மெய்யெண் மூலம் ஒன்று 2, 3-க்கு இடையே உள்ளது. மேலும் டிகார்ட்டின் குறி விதிப்படி இச்சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு கூட்டு மெய்யெண் மூலம்தான் உள்ளது.

மேலும் இம் மூலம் 2, 2·2 என்பவற்றிற்கிடையே உள்ளது எனவும் நிரூபிக்கலாம். ஏனெனில் $f(2) < 0$, $f(2{\cdot}2) > 0$. எனவே இங்கு $\alpha = 2{\cdot}1$ எனக் கொள்வோம். $\alpha + h$ உண்மையான மதிப்பு எனில் $h = -\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = -\dfrac{f(2{\cdot}1)}{f'(2{\cdot}1)}$

$$\frac{f(2{\cdot}1)}{f'(2{\cdot}1)} = +\frac{{\cdot}061}{11{\cdot}23} = +0{\cdot}00543$$

$$\therefore\ \alpha + h = 2{\cdot}1 - {\cdot}00543$$

$$= 2{\cdot}0946 = \alpha_1 \text{ (என்க)}$$

$$\therefore \quad h_1 = -\frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} = -\frac{f(2 \cdot 0946)}{f'(2 \cdot 0946)}$$

$$= -\cdot 00004852$$

$\therefore \ f(x) = 0$-ன் மூலத்தின் தோராய மதிப்பு

$$= 2 \cdot 0946 - \cdot 00004852$$

$$= 2 \cdot 09455148$$

2·31. ஹார்னர் முறையின் சுருக்கம்

பொதுவாக, சுருக்கிய வகுத்தலில் வகுபடும் எண்ணின் இலக்கங்கள் முடிந்துவிட்டால், வகுபடும் எண்ணிற்கு அடுத்தடுத்து பூச்சியம் இட்டு வகுப்பதற்குப் பதிலாக வகுக்கும் எண்ணிலுள்ள இலக்கங்களேயே வலப் புறத்திலிருந்து அடுத்தடுத்து நீக்கி வகுக்கிறோம். இவ்வாறு செய்வதால் ஒரு நிலை அடைந்தபின் வகுக்கும் எண்ணின் இலக்கங்களோ முடிவடைந்துவிடும். இவ்வாறு முடிவடையும் நிலை வகுபடும் எண்ணின் இலக்கங்களைப் பொறுத்தது. கடைசியாகக் கிடைக்கும் ஈவு உண்மையான ஈவினின்றும் கடைசி இலக்கத்திலேயோ அல்லது கடைசி இரண்டு இலக்கங்களிலேயோதான் மாறுபடும். ஹார்னரின் முறையிலும் இதே தத்துவத்தைக் கையாளுகிறோம்.

சுருக்கிய வகுத்தல் துவங்கியவுடன் மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் அடுத்தடுத்த குணகங்களுக்குப் பூச்சியத்தைச் சேர்ப்பதற்குப் பதிலாக, கடைசி உறுப்பிற்கு முன்னுள்ள உறுப்பின் குணகத்தில் கடைசி இலக்கத்தை நீக்கிவிடுகிறோம். இதே போன்று கடைசியிலிருந்து மூன்றுவதாயமைந்த குணகத்தின் வலப் பக்கத்திலிருந்து இரண்டு இலக்கங்களை நீக்கிவிடுகிறோம். இவ்வாறு மற்ற குணகங்களுக்கும் இலக்கங்களை நீக்குகிறோம். இவ்வாறு செய்வதன் மூலம் இன்றியமையாத இலக்கங்களை அவற்றின் நிலையில் வைத்துக்கொண்டு தேவையற்ற இலக்கங்களை அறவே நீக்கிவிடுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 11x + 4 = 0$-ன், 1, 2-க்கிடையே அமைந்த மூலத்தின் மதிப்பைக் காண்க.

முதலில் இம்மூலத்தின் மதிப்பை மூன்று தசமத் தானங்களுக்கு வழக்கமான முறையில் கண்டுபிடித்து, பின்னர் சுருக்கு வகுத்தல் முறை உபயோகிப்போம்.

1	4	−4	−11	4
	1	5	1	−10
	5	1	−10	−60000
	1	6	7	50976
	6	7	−3000	−90240000
	1	7	11496	72690561
	7	1400	8496	−17549439
	1	516	14808	
	80	1916	23304000	
	6	552	926187	
	86	2468	24230187	
	6	588	935601	
	92	305600	25165788	
	6	3129		
	98	308729		
	6	3138		
	1040	311867		
	3	3147		
	1043	315014		
	3			
	1046			
	3			
	1049			
	3			
	1052			

இப்போது மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$$x^4+1052\,x^3+315014\,x^2+25165788\,x-17549439=0.$$

இதிலிருந்து கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலத்தின் மதிப்பைத் தொடர்ந்து கண்டுபிடிக்கக் கீழ்க்கண்ட சுருக்கிய முறையை உபயோகிக்கிறோம்.

1052	315014	25165788	−17549439 (1·636913575
	6	18936	15213090
	3156	2585515	−2336349
	6	18972	2301597
	3162	2554487	−34752
	6	285	25601
	3168	255733	−9151
		285	7680
	31	256018	−1471
			1280
			−191
			179
			12

பயிற்சி 2 (m)

நியூட்டன் முறை மூலம், கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்க :

1. $x^3+x^2+x-100=0.$
2. $x^4+4x^3-4x^2-11x+4=0.$
3. $x^3-4=0.$

ஹார்னர் முறையின் மூலம் தீர்வு காண்க :

4. $x^3-208x^2-1059x-1278=0.$
5. $x^3-4x-7=0.$
6. $x^3-2x-5=0.$
7. $x^3-6x-13=0.$
8. $x^4-7x^2+18x-8=0.$
9. $4x^3-13x^2-31x-275=0.$

10. $2x^3-85x^2-85x-87 = 0$.

11. நியூட்டன் முறையின்படி தீர்வு காண்க :

(i) $x^3+x^2+x-100 = 0$.

(ii) $5x^3+10x^2-86 = 0$.

(iii) $4x^3+x^2+6x+45 = 0$.

12. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளின் கூட்டெண் மூலங்களை 2 பதின் பகுப்பு வரைக் காண்க :

(i) $x^3-3x-4 = 0$.

(ii) $x^4-8x^2+5x-8 = 0$.

(iii) $x^3+x^2-7x-3 = 0$.

(iv) $x^3-5x-11 = 0$.

(v) $x^3-8x-40 = 0$.

13. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளின் குறையெண் மூலங்களை 3 பதின் பகுப்பு வரைக் கண்டுபிடி :

(i) $x^3-x^2+12x+24=0$.

(ii) $2x^4-5x^3+2x^2-4x-40 = 0$.

(iii) $3x^3+6x^2+2x+8. = 0$.

முப்படி, நாற்படிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணல்

ஒரு முப்படிச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பு

$p_0x^3 + 3p_1x^2 + 3p_2x + p_3 = 0$ என இருக்கட்டும்.

இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களை 'h' ஆல் குறைத்து மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் x^2-ன் கெழுவைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துவோம்.

$$p_0(x+h)^3 + 3p_1(x+h)^2 + 3p_2(x+h) + p_3 = 0$$

$$p_0x^3 + 3(p_0h+p_1)x^2 + 3(p_0h^2+2p_1h+p_2)x + (p_0h^3+3p_1h^2+3p_2h+p_3) = 0$$

$$\therefore\ p_0h+p_1 = 0 \text{ அல்லது } h = -p_1/p_0$$

$\therefore$ x^2 உறுப்பு நீங்கலாக அமைந்த சமன்பாடு

$$p_0x^3 + 3\left(\frac{p_0p_2 - p_1^2}{p_0}\right)x + \left(\frac{p_3p_0^2 - 3p_0p_1p_2 + 2p_1^3}{p_0^2}\right) = 0.$$

இதன் மூலங்களை p_0 ஆல் பெருக்க,

$$x^3 + 3(p_0p_2 - p_1^2)x + (p_3p_0^2 - 3p_0p_1p_2 + 2p_1^3) = 0$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$p_0p_2 - p_1^2 = H$ எனவும், $p_3p_0^2 - 3p_0p_1p_2 + 2p_1^3 = G$ எனவும் கொண்டால், இச்சமன்பாட்டை

$$x^3 + 3Hx + G = 0 \text{ என எழுதலாம்.}$$

இதை ஒரு முப்படிச் சமன்பாட்டின் திட்ட அமைப்பு எனக் கொள்கிறோம்.

பொது அமைப்பிலுள்ள முப்படிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β, γ எனக் கொண்டால் திட்ட அமைப்பிலுள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $p_0\alpha + p_1, p_0\beta + p_1, p_0\gamma + p_1$ ஆகும். எனவே முதற் கண் குறித்த முப்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் திட்ட அமைப்பிலுள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைப் பொறுத்து அமையும்.

2·33. முப்படிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மைகள்

$f(x) \equiv x^3 + 3Hx + G = 0$ என்பது திட்ட அமைப்பிலுள்ள முப்படிச் சமன்பாடு ஆகும். இதன் மூலங்களின் இரண்டிரண்டின் வேறுபாடுகளின் வர்க்கங்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு

$$F(x) \equiv x^3 + 18Hx^2 + 81H^2x + 27(G^2 + 4H^3) = 0$$

அதாவது α, β, γ என்பவை $f(x) = 0$-ன் மூலங்கள் எனில், $(\alpha-\beta)^2$, $(\beta-\gamma)^2$, $(\gamma-\alpha)^2$ என்பவை $F(x) = 0$-ன் மூலங்கள் ஆகும். கற்பனை மூலங்கள் இரண்டிரண்டாக அமையுமாதலின் $f(x) = 0$-ன் ஒரு மூலமேனும் மெய்யெண் மதிப்புடையதாயிருத்தல் வேண்டும்.

இப்போது $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$
$$= -27(G^2 + 4H^3) \quad \ldots \quad (1)$$

மேலும் $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2 + (\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$
$$+ (\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2 = 81H^2 \quad \ldots \quad (2)$$

$$(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 = -18H \quad \ldots \quad (3)$$

(a) $G^2 + 4H^3 = 0$ எனில், $\alpha - \beta = 0$ அல்லது $\beta - \gamma = 0$ அல்லது $\gamma - \alpha = 0$.

எனவே, $f(x) = 0$-ன் இரண்டு மூலங்களேனும் ஒன்றுக்கொன்று சமமாதல் வேண்டும். மேலும் $H \neq 0$ எனில், $f(x)=0$-ன் இரண்டே இரண்டு மூலங்கள் சமமாயிருக்கும்.

ஆனால் $H=0$, $G=0$ எனில் $\alpha-\beta = \beta-\gamma = \gamma-\alpha = 0$. [(3), (1) இலிருந்து]

எனவே $f(x) = 0$-ன் எல்லா மூலங்களும் சமமாகும்.

(b) $G^2+4H^3 < 0$ எனில் H எதிர் மதிப்புடையதாயிருத்தல் வேண்டும். மேலும் $F(-x) = -x^6+18Hx^2-81H^2x+27(G^2+4H^3)$-ல் எல்லா உறுப்புகளுமே எதிர் மதிப்பு உடையன வாதலால் $F(x)=0$-ல் குறை மெய்யெண் மூலங்களே கிடையாது $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2 > 0$ ஆதலால் எல்லா மூலங்களுமே மெய் மதிப்பு உடையன. எனவே α, β, γ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று மாறுபட்ட கூட்டு மெய்யெண் மதிப்புடைய மூலங்களாகும்.

(c) $G^2+4H^3 > 0$ எனில் $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ குறை மதிப்பு உடையது. α, β, γ என்பவற்றுள், அதாவது $f(x)=0$-ன் மூலங்களில் இரண்டு கற்பனையாகும். ஏனெனில் α, β, γ என்பவை மெய் மதிப்பு உடையவை எனில், $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ குறை மதிப்பு உடையதாயிருக்க முடியாது. மேலும் $\alpha\beta\gamma = -G$. எனவே இந்நிலையில் மூன்றுவது மூலமான மெய்யெண் மூலத்தின் குறி G-ன் குறிக்கு மாறுபட்டிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^3-7x+6 = 0$-ன் மூலங்களின் தன்மையைக் காண்க.

இங்கு $H = -\dfrac{7}{3}$, $G=6$. $\therefore$ $G^2+4H^3 = 36-\dfrac{1372}{27} = -\dfrac{400}{27}$. எனவே கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யெண் மதிப்புடையவை

பயிற்சி 2 (n)

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தன்மைகளைக் காண்க :

1. $x^3-3x^2-6x+5=0$
2. $x^3+6x^2+9x+4=0$
3. $x^3+2x+1=0$
4. $x^3+x^2-5x+3=0$.

திட்ட அமைப்பிலுள்ள முப்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணல்: கார்டன் முறை (Cardan's Method)

$p_0x^3 + 3p_1x^2 + 3p_2x + p_3 = 0$ என்ற முப்படிச் சமன்பாட்டை $x^3 + 3Hx + G = 0$ என்ற திட்ட அமைப்பில் எழுதலாம் என முன்பு கண்டோம். இப்பொழுது இதன் தீர்வுகளைக் கார்டன் முறைப்படி அறிவோம்.

$x = p^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{1}{3}}$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore\ x^3 = p + q + 3p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}(p^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{1}{3}})$

அதாவது $x^3 - 3p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}x - (p+q) = 0$ ... ... (1)

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு $x^3 + 3Hx + G = 0$ .. (2)

இவை இரண்டும் ஒரே சமன்பாட்டைக் குறித்தால்

$p + q = -G.$

$p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}} = -H$

அதாவது $pq = -H^3$

ஆனால் $(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq$

$= G^2 + 4H^3$

$\therefore\ p-q = \sqrt{G^2+4H^3}$

$p+q = -G.$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}\left[-G + \sqrt{G^2 + 4H^3}\right] \\ q &= \frac{1}{2}\left[-G - \sqrt{G^2 + 4H^3}\right] \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (3)$$

மேலும் $q^{\frac{1}{3}} = -\dfrac{H}{p^{\frac{1}{3}}}$

எடுத்துக்கொண்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு $x = p^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{1}{3}}$.

p-ன் முப்படி மூலங்களின் மதிப்புகளும் முறையே $p^{\frac{1}{3}}$, $wp^{\frac{1}{3}}$, $w^2 p^{\frac{1}{3}}$ ஆகும். இங்கு w என்பது ஒன்றின் முப்படி மூலங்களில் கற்பனை மூலங்களுள் ஒன்று. இவற்றிற்கேற்ப q-ன் முப்படி மூலங்களின் மதிப்புகள் முறையே $-\frac{H}{p^{\frac{1}{3}}}$, $-\frac{H}{wp^{\frac{1}{3}}}$, $-\frac{H}{w^2 p^{\frac{1}{3}}}$, அதாவது $-\frac{H}{p^{\frac{1}{3}}}, -w^2\frac{H}{p^{\frac{1}{3}}}, -w\frac{H}{p^{\frac{1}{3}}}$. எனவே கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\sqrt[3]{p} - \frac{H}{\sqrt[3]{p}}$, $w\sqrt[3]{p} - \frac{w^2 H}{\sqrt[3]{p}}$, $w^2 \sqrt[3]{p} - \frac{w H}{\sqrt[3]{p}}$ என்பன ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^3 - 18x - 35 = 0$-ன் தீர்வு காண்க.

$x = p^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{1}{3}}$ என்க.

$\therefore\ x^3 - 3\, p^{\frac{1}{3}}\, q^{\frac{1}{3}}\, x - (p+q) = 0$

x-ன் சமபடிக் கெழுக்களைச் சமன் செய்தால்,

$$p + q = 35$$

$$p^{\frac{1}{3}}\, q^{\frac{1}{3}} = 6$$

$$\therefore pq = 216$$

$$\therefore p - q = \sqrt{(p+q)^2 - 4pq}$$

$$= \sqrt{1225 - 864}$$

$$= \sqrt{361} = 19$$

$$\therefore\ p = 27$$

$$q = 8.$$

$\therefore$ கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம்

$$p^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{1}{3}} = 3 + 2 = 5$$

$x^3 - 18x - 35$-ஐ $(x-5)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது

$$x^2 + 5x + 7 = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

5	1	0	−18	−35
		5	25	35
		5	7	0

$\therefore$ சமன்பாட்டின் மற்ற மூலங்கள் $\dfrac{-5 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$ ஆகும்.

பயிற்சி 2 (o)

கீழ்க்கண்ட முப்படிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

1. $x^3 + 6x - 20 = 0$
2. $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$
3. $x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = 0$
4. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
5. $x^3 + x^2 - 9x + 12 = 0$

2·34. நாற்படிச் சமன்பாடு (Biquadratic) — பெராரி முறை (Ferrari's Method)

$p_0x^4 - 4p_1x^3 + 6p_2x^2 + 4p_3x + p_4 = 0$ என்பதை ஒரு நாற்படிச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பாகக் கொள்வோம். இதன் மூலங்களை p_0 ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும் சமன்பாடு

$$x^4 + 4p_1x^3 + 6p_2p_0x^2 + 4p_3p_0{}^2\, x + p_4p_0{}^3 = 0$$

அதாவது

$$x^4 + 4px^3 + 6qx^2 + 4rx + s = 0 \quad \text{(என்க.)}$$

இரு புறமும் $(ax+b)^2$ஐக் கூட்ட,

$$x^4 + 4px^3 + (6q + a^2)\, x^2 + (4r + 2ab)\, x + (s + b^2) = (ax+b)^2$$

இதன் இடப் புறம் ஒரு சரியான வர்க்கமாயிருக்கும்படி a, b-ன் மதிப்புகளைக் காண்போம்.

அதாவது இடப் புறம் $\equiv (x^2 + 2px + t)^2$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ x-ன் சமபடிகளின் கெழுக்களை ஒப்பிட்டால்,

$$\left.\begin{array}{l} 6q+a^2 = 4p^2+2t \\ 4r+2ab = 4pt \\ s+b^2 = t^2 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad (A)$$

இச்சமன்பாடுகளினின்றும் a, b ஐ நீக்கக் கிடைப்பது

$$(4p^2+2t-6q)\ (t^2-s) = \frac{(4pt-4r)^2}{4} = 4\,(pt-r)^2$$

அல்லது, $2t^3-6qt^2+(8pr-2s)\ t+6qs-4p^2s-4r^2 = 0$

அதாவது,

$$t^3-3qt^2+(4pr-s)\ t-(2p^2s+2r^2-8qs)=0 \quad \ldots \quad (B)$$

t-ல் அமைந்த இம்முப்படிச் சமன்பாட்டிற்கு ஒரு மெய்யெண் தீர்வேனும் உண்டு. அதைக் கண்டுபிடித்தால் (A)-விருந்து a, b-ன் மதிப்புகளைக் காணலாம் $\therefore$ t, a, b என்பவற்றின் மதிப்புகளைக் கொண்டு,

$(x^2+2px+t)^2 = (ax+b)^2$-ன் தீர்வுகள் காணலாம்.

$$\therefore \quad x^2+2px+t = \pm\,(ax+b)$$

குறிப்பு :

$x^2+2px+t-(ax+b) = 0$-ன் தீர்வுகள் α, β எனவும்,

$x^2+2px+t+(ax+b)=0$-ன் தீர்வுகள் γ, δ எனவும் இருக்கட்டும்.

$\therefore$ $\alpha\beta = t-b \qquad \gamma\delta = t+b$ ஆதலால்

t-ன் ஒரு மதிப்பு $\dfrac{\alpha\beta+\gamma\delta}{2}$

எனவே (B) ன் மூலங்கள் $\dfrac{\alpha\beta+\gamma\delta}{2}$, $\quad \dfrac{\beta\gamma+\alpha\delta}{2}$, $\quad \dfrac{\gamma\delta+\beta\delta}{2}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^4+2x^3-7x^2-8x+12 = 0$-ன் தீர்வு காண்க.

இருபுறமும் $(ax+b)^2$ஐக் கூட்ட,

$$x^4+2x^3-7x^2-8x+12+(ax+b)^2 = (ax+b)^2$$

$$x^4+2x^3+(a^2-7)\,x^2+(2ab-8)\,x+12+b^2 \equiv (x^2+x+q)^2 \text{ என்க.}$$

$\therefore\quad a^2-7 = 1+2q$

$\therefore\quad a^2 = 2q+8 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

$2ab-8 = 2q$

$\therefore\quad ab = q+4 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

$12+b^2 = q^2$

$\therefore\quad b^2 = q^2-12 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

(1), (2), (3)-இவற்றிலிருந்து

$(q+4)^2 = (q^2-12)\,(2q+8)$

அதாவது $(q+4)\,[(q+4)-2\,(q^2-12)] = 0$

$\therefore\quad q = -4$ அல்லது

$2q^2-q-28 = 0$

$q = 4,\ -3\frac{1}{2}$

$q = 4$ என்ற மதிப்பைக் கொண்டால்

$a = 4,\ b = 2$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\therefore$ கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$(x^2+x+4)^2 = (4x+2)^2$ என எழுதலாம்.

$\therefore$ இதன் மூலங்கள்

$x^2+x+4 = (4x+2)$, அதாவது

$x^2-3x+2 = 0$;

$x^2+x+4 = -(4x+2)$, அதாவது

$x^2+5x+6 = 0$ என்பவற்றின் மூலங்களாகும்.

$\therefore$ கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $1,\ 2,\ -2,\ -3,$ ஆகும்.

பயிற்சி 2 (p)

பெராரி முறைப்படி கீழ்க்கண்ட நாற்படிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க :

1. $x^4+8x^3+9x^2-8x-10=0$
2. $x^4-12x-5=0$
3. $x^4-10x^2-20x-16=0$
4. $x^4-2x^3-12x^2+10x+3=0$
5. $x^4-3x^2-42x-40=0$
6. $4x^4+4x^3-7x^2-4x-12=0$
7. $x^4-12x^2+24x+140=0$
8. $x^4-2x^2+8x-3=0$
9. $6x^4-7x^3+8x^2-7x+2=0$
10. $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0.$

2·35. கோட்டுருவப் படங்களைக் கொண்டு தோராயத் தீர்வுகள் காணல் (Graphical solutions of equations)

$f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$y=f(x)$-ன் கோட்டுருவப் படம் வரைக. இவ்வரைகோடு x அச்சை எங்கெங்கு வெட்டுகிறதோ அப்புள்ளிகளுக்கெல்லாம் $y=f(x)=0$. எனவே இவ்வரைகோடு x அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளுக்குரிய x-மதிப்புகள் எல்லாம் $f(x)=0$-ன் மூலங்களாகும். இப்போது முப்படி, நாற்படிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் காண, கோட்டுருவப் படங்கள் வரைந்து அவை x அச்சை வெட்டும் இடங்களைக் கொண்டு தீர்வு காண்பது பற்றி நோக்குவோம்.

முப்படிச் சமன்பாடு :

சமன்பாட்டை $x^3+ax+b=0$ எனக் கொள்வோம்.

(இங்கு x^2 உறுப்பு இல்லை என்பதைக் காண்க.)

முறை 1 :

சமன்பாட்டை

$x^3 = -(ax+b)$ எனக் கொண்டால்

$y = x^3$

$y = -(ax+b)$ என்ற இரு படங்களை வரைவோம்.

$y = -(ax+b)$ என்பது ஒரு நேர் கோடு. $y=x^3$ ஒரு முப்படி வளை வரை. இவை இரண்டும் ஒன்றையொன்று வெட்டு மிடங்களில்

$$x^3 = -(ax+b)$$

$$\therefore \quad x^3+ax+b = 0.$$

எனவே $y = x^3$, $y = -(ax+b)$ என்பவை வெட்டுகின்ற புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகள் $x^3+ax+b = 0$-ன் மூலங் களாகும். $y=x^3$, $y=-(ax+b)$ — இவை மூன்று புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்ளலாம்; அல்லது ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டும் வெட்டி கொள்ளலாம். முதல் நிலையில் சமன்பாட்டிற்கு மூன்று மெய் யெண் தீர்வுகளும் இரண்டாவது நிலையில் ஒரு மெய்யெண் தீர்வும் இரண்டு கற்பனைத் தீர்வுகளும் உண்டு.

முறை 2 :

$x^3+ax+b=0$ ஐ

x ஆல் பெருக்க,

$$x^4 + ax^2 + bx = 0$$

அதாவது $(x^2)^2 + x^2 + (a-1)x^2 + bx = 0$

இதில் $y = x^2$ எனக் கொண்டால்,

$$y^2 + x^2 + (a-1)y + bx = 0$$

இது $\left(-\frac{b}{2}, -\frac{a-1}{2}\right)$ என்ற புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட வட்டம். இவ் வட்டமும் $y = x^2$ என்ற பரவளையமும் வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகள் கொடுத்துள்ள சமன் பாட்டின் மூலங்களாகும். இங்கு $x = 0$ என்ற தீர்வை நீக்க வேண்டும். ஏனெனில் சமன்பாட்டை x ஆல் பெருக்குகிறோம்.

குறிப்பு :

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ என்ற முறையில் சமன்பாடு அமைந்திருப்பின் இதன் மூலங்களை h ஆல் குறைத்து, புதிய சமன்பாட்டில் x^2 உறுப்பை நீக்கவும். இவ்வாறு மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^3 + Ax + B = 0$ என்ற முறையில் இருக்கும். இதன் தீர்வுகளை மேற்குறித்த இரு வழிகளுள் ஏதேனும் ஒன்றால் கண்டு பிடிக்கலாம்.

நேரடியாகத் தீர்வு காண வேண்டின், சமன்பாட்டை

$$ax^3 = -(bx^2 + cx + d)$$

அதாவது $x^3 = -\dfrac{b}{a}x^2 - \dfrac{c}{a}x - \dfrac{d}{a}$ என எழுதலாம்.

$$y = x^3,\ y = -\frac{b}{a}x^2 - \frac{c}{a}x - \frac{d}{a}$$

என்பவற்றின் கோட்டுருவப் படங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகள் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

$y = x^3$ ஒரு முப்படிப் பரவளையம்.

$y = -\dfrac{b}{a}x^2 - \dfrac{c}{a}x - \dfrac{d}{a}$ ஒரு பரவளையம். இவ்விரண்டும் கட்டாயம் ஒரு புள்ளியில் வெட்டும். மேலும் இரு புள்ளிகளில் வெட்டினாலும் வெட்டலாம்; ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டினால் சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு மெய்யெண் மூலம்தான் உண்டு எனக் காணலாம்.

நாற்படிச் சமன்பாடு :

ஒரு நாற்படிச் சமன்பாடு $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ என இருக்கட்டும்.

இச்சமன்பாட்டை $\left(x^2 + \dfrac{a}{2}x\right)^2 - \dfrac{a^2}{4}x^2 + bx^2 + cx + d = 0$ என எழுதலாம். அதாவது,

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)^2 + x^2 + \left(b - 1 - \frac{a^2}{4}\right)x^2 + cx + d = 0$$

இங்கு, $x^2 + \frac{a}{2}x = y$ ... ... (1)

எனப் பிரதியிடக் கிடைப்பது,

$$y^2+x^2+\left(b-1-\frac{a^2}{4}\right)\left(y-\frac{a}{2}x\right)+cx+d=0$$

அதாவது,

$$x^2+y^2+\left\{c-\frac{a}{2}\left(b-1-\frac{a^2}{4}\right)\right\}x + \left(b-1-\frac{a^2}{4}\right)y+d=0 \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடு, (1), ஒரு பரவளையத்தையும் சமன்பாடு (2), ஒரு வட்டத்தையும் குறிக்கும். இவ்விரு வளை வரைகளையும் கோட்டுருவப் படத்தில் வரைந்தால் இவை ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகள் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

குறிப்பு: கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை எளிய முறையில் அமைக்க அதன் மூலங்களை h என்னும் மதிப்பால் குறைத்து, சமன்பாட்டை $x^4+Ax^2+Bx+C=0$ என்ற அமைப்பில் கொண்டு வரலாம். $\left[\text{இங்கு } h = -\frac{a}{4}\right]$.

எனவே, $y=x^2$ எனக் கொண்டால்,

சமன்பாட்டை $x^4+x^2-x^2+Ax^2+Bx+C=0$ என எழுத,

$y^2+x^2-y+Ay+Bx+C=0$ எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

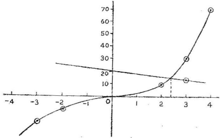
$y=x^2$ என்ற பரவளையம். ... (1)

$x^2+y^2+Bx+(A-1)y+C=0$ என்ற வட்டம், ... (2)

இவை ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகள் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். இவற்றுடன் h ஐக் கூட்ட, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

கோட்டுருவப் படத்தின் மூலம் $x^3+2x-20=0$-ன் மூலத்தை முதல் பதின் பகுப்பு இடத்திற்குத் திருத்தமாகக் காண்க. (செ.ப க.)



படம் 8.

$f(x)=x^3+2x-20$ எனக் கொண்டால் $f(x)$-ல் ஒரே ஒரு குறி மாற்றமும் $f(-x)$-ல் குறி மாற்றங்களே இல்லையாகவும் அமைந்திருப்பதால் $f(x)=0$-க்கு ஒரே ஒரு மெய்யெண் மூலம் (கூட்டு மதிப்புடையது) உள்ளது என அறிகிறோம்.

$$x^3 = 20-2x$$

இப்பொழுது $y = x^3$

$y = 20-2x$. இவற்றின் கோட்டுருவப் படங்களை வரைக. இவை சந்திக்கும் புள்ளியின் x ஆயத் தொலை கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மெய்யெண் மூலமாகும். அதாவது சமன்பாட்டின் மூலம் வரை படத்திலிருந்து, 2·45 அதாவது 2.5.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

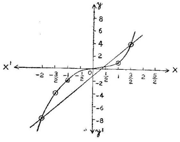
கோட்டுருவப் படத்தின் மூலம் தீர்வு காண்க : $2x^3 - 15x^2 + 31x - 12 = 0$.

சமன்பாட்டின் மூலங்களை $\frac{5}{2}$ ஆல் குறைக்கக் கிடைக்கும் மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^3 - \frac{13}{4}x + \frac{3}{2} = 0$$

அதாவது $x^3 = \frac{13}{4}x - \frac{3}{2}$.

எனவே $y = x^3$; $y = \frac{13}{4}x - \frac{3}{2}$ என்பவற்றின் வரைபடங்களை வரையவும்.

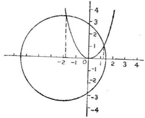


$y = x^3$, $y = \frac{13}{4}x - \frac{3}{2}$ — இவை வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகள் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் வரைபடத்திலிருந்து மூலங்களின் மதிப்பு $\frac{1}{2}$, -2, $\frac{3}{2}$ எனக் கிடைக்கிறது. எனவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\frac{1}{2} + \frac{5}{2}$, $-2 + \frac{5}{2}$, $\frac{3}{2} + \frac{5}{2}$ அதாவது 3, $\frac{1}{2}$, 4 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$x^4 + x^2 + 4x - 7 = 0$-ன் மெய்யெண் மூலங்களைக் கோட்டுருவப் படத்தின் வாயிலாகக் காண்க.

$y = x^2$ எனில், இச்சமன்பாட்டை $y^2+x^2+4x-7=0$ என எழுதலாம். இது $(-2, 0)$ஐ மையமாகவும், $\sqrt{11}$ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடாகும். எனவே, $y = x^2$;



படம் 4

$x^2 + y^2 + 4x - 7 = 0$ என்பவற்றின் கோட்டுருவப் படங்களை வரையவும். இவற்றிற்குப் பொதுவாய் அமைந்த புள்ளிகளின் x ஆயத் தூரங்கள் சமன்பாட்டின் மூலங்கள். இங்குச் சமன்பாட்டின் மெய்யெண் மூலங்கள் $-1{\cdot}85$, $1{\cdot}08$ ஆகும்.

பயிற்சி 2 (q)

1. $x^3 - 2x - 7 = 0$-ன் தீர்வைக் கோட்டுருவப் படத்தின் மூலம் காண்க. இம் மதிப்புகளை ஹார்னர் முறையின்படி இரண்டு பதின் பகுப்பு இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் கண்டு ஒப்பிடுக.

2. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் கோட்டுருவப் படத்தின் மூலம் காண்க.

(i) $x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0$

(ii) $4x^3 - 21x - 10 = 0$

(iii) $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = 0$

(iv) $x^3 - 3x + 1 = 0$

(v) $x^3 - 0{\cdot}9x^2 - 1{\cdot}9x + 1{\cdot}8 = 0$

(vi) $2x^3 - x^2 - 6x - 10 = 0$

(vii) $x^4 - 7x^2 + 2x + 2 = 0$

(viii) $y^4 - 12y^3 + 28y^2 + 96y - 288 = 0$

(ix) $2x^4 - 3x^3 - 3x - 2 = 0$

(x) $6x^4 - 25x^3 + 37x^2 - 25x + 6 = 0$

(xi) $x^4 + x^2 + 4x - 7 = 0$

(xii) $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$.

விடைகள்

பயிற்சி 1 (c)

1. 6
2. 0
3. 60
4. 0
5. 0
7. $-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
17. $8abc$
33. -3 ; $\pm i$
34. $\frac{1}{2}$; -14.
35. 0; 0; 0; $-(a+b+c+d)$
36. $(a+b+c+d)$; $a+c-b-d$; $\pm\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$
37. $-\frac{5}{3}$, -1, $\frac{14}{5}$
38. $(1+a^2+b^2)^3$

பயிற்சி 1 (d)

3. $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

பயிற்சி 1 (e)

1. $x=4, \quad y=2, \quad z=3$
2. $x=3, \quad y=4 \quad z=6$
3. $x = \frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)}; \; y = \frac{(k-c)(k-a)}{(b-c)(b-a)};$
   $z = \frac{(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)}$
4. $x=1, \quad y=3, \quad z=5$
5. $x=3, \quad y=1, \quad z=2$
6. $k=5.$

பயிற்சி 2 (a)

8. $x^3 - x^2 + 3x - 2 = 0$
9. 3, 5
10. $14x^3 - 23x^2 - 60x + 9 = 0.$

பயிற்சி 2 (b)

1. $3 \pm \sqrt{10}, \; 1 \pm 2i.$
2. (a) $1, \frac{1}{2}, 2 \pm \sqrt{2}$

   (b) $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}), \; -1 \pm i\sqrt{2}$

   (c) $3 \pm \sqrt{3}, \; 2, \; \frac{1}{2}, \; \frac{1}{3}(2 \pm \sqrt{5})$

   (d) $1 + 2i, \; 1$

   (e) $\pm \sqrt{2} \pm \sqrt{5}; \frac{4}{3}$

   (f) $\pm \sqrt{2} \pm i; \; \frac{3(1 \pm i\sqrt{7})}{4}$

   (g) $5 \pm 5i, \; \frac{1}{2}, \; -2$

(h) $-2 \pm \sqrt{3}$; $1 \pm i$

(i) $2 \pm i\sqrt{7}$; $\frac{8}{3}$

(j) $2 \pm i\sqrt{3}$; $-2 \pm i$.

பயிற்சி 2 (c)

(1) $5, 4, -4$

(2) $2, 2, -1$

(3) $6, 4, -1$

(7) $1, 2, 1 \pm i\sqrt{2}$

(8) $\pm \sqrt{3}, 1 \pm i\sqrt{6}$

(11) $-1.5, 1, 3$

(13) $8, 3, \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{2}$

(14) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(16) $2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$

(18) $k = -24$; $2, -4, 3$

(19) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

(20) $-5, -2, 1, 4$

(21) $-2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{9}$

(22) $\frac{1}{2}, 1, 3, 9$.

பயிற்சி 2 (d)

1. (i) $q^2 - 2pr$ (ii) $pq - r$ (iii) $pq - 3r$ (iv) $\frac{pq}{r} - 3$.

2. (i) $\frac{q^2 - 2pr}{r^2}$ (ii) $\frac{p^2 - 2q}{r^2}$ (iii) $\frac{pq}{r} - 3$.

(iv) $3p^3 - 16pq + 64r$ (v) $q^3 - 3pqr + 3r^2$

3. (i) $pr-4s$ (ii) $p^4-4p^2q+2q^2+4pr-4s$.

4. (i) $\frac{q}{r}$ (ii) $r^2+(q-1)^2$

7. (i) -3 (ii) $\frac{17}{4}$

8. (i) $x^3+2px^2+(p^2+q)x+pq-r=0$.

(ii) $x^3-2qx^2+(q^2+pr)x+r^2-pqr=0$.

9. (i) $\frac{-a_{n-1}}{a_n}$ (ii) $\frac{1}{a_1^2}[a_2a_4-4a_1a_5]$

(iii) $\frac{1}{a_1^2}[5a_6a_1+a_5a_2-a_3a_4]$

10. 795. 15. $x^3+x^2-2x-1=0$.

18. 123. 19. 99, 795

பயிற்சி 2 (e)

1. $x^5-5x^4+3x^3-2x^2+2x-3=0$.
2. $x^7+3x^5+x^3+x^2+7x-2=0$.
3. $x^3+6x^2-36x+27=0$.
4. $x^4-7x^3+48x^2-252x+432=0$
5. $x^4-2x^3+6x-6=0$.
6. $x^3-15x^2-14x+2=0$.
7. $x^3-24x^2+9x-24=0$.
8. $x^4-4x^3+12x^2-18x+27=0$.
9. $2y^4-5y^3-7y^2+3y-1=0$.
10. $4y^4-2y^3+6y^2-3y-1=0$.

பயிற்சி 2 (f)

1. $3\pm2\sqrt{2}$, $2\pm\sqrt{3}$
2. ±1, 2, $\frac{1}{2}$, $(5\pm i\sqrt{11})/6$

3. $-1, \ -2, \ -\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$

4. $1, \ \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}\,i), \ \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$

5. $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}), \ 1, \ 1.$

6. $2, \ 2, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}$

7. $\pm i, \ 3, \ \frac{1}{3}$

8. $-1, \ -1, \ -1, \ 3 \pm 2\sqrt{2}$

9. $-1, \ -1, \ -1, \ \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

10. $-1, \ \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}), \ -2 \pm \sqrt{3}$

11. $1, \ 2, \ \frac{1}{2}, \ -3, \ -\frac{1}{3}$

12. $1, \ \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}), \ \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$

13. $\pm 1, \ \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})}, \ \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})}$

14. $\pm 1, \ 2, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{6}(5 \pm i\sqrt{11})$

15. $\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}), \ 2, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$

16. $\pm 1, \ \frac{1}{3}(2 \pm i\sqrt{5}), \ \frac{1}{4}(3 \pm i\sqrt{7})$

17. $1, \ 1, \ \pm i, \ \frac{1}{4}(-3 \pm i\sqrt{7}).$

பயிற்சி 2 (g)

1. (i) $2x^5+21x^4+83x^3+131x^2+179x+63=0.$

   (ii) $2x^5-39x^4+304x^3-1187x^2+2327x-1834=0.$

   (iii) $2x^5+11x^4+24x^3+23x^2+7x+1=0.$

   (iv) $2x^5-29x^4+163x^3-439x^2+719x-427=0.$

2. $x^5-4x^4+3x^2-4x+4=0.$

3. $y^3-8y^2+19y-15=0.$

4. $y^5+15y^4+94y^3+305y^2+507y+353=0.$

5. $y^4+20y^3+153y^2+526y+689=0.$

6. $3y^5-60y^4+475y^3-1860y^2+3600y-2745=0.$

7. $4y^5-40y^4+153y^3-303y^2+303y-129=0.$

8. $y^4+3y^3+y^2-4y+1=0.$

9. $\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, -1, -3$

10. $\frac{2(1+\sqrt{5})\pm\sqrt{-2+6\sqrt{5}}}{4}$, $\frac{2(1-\sqrt{5})\pm\sqrt{-2-6\sqrt{5}}}{4}$

11. $y^3-8y-15=0.$

12. $y^3-2y+1=0.$

13. $y^4-4y^2+1=0.$

14. $y^4-4y^2+1=0.$

15. $1, -2+3w, -2+3w^2$

16. $-4\pm\sqrt{(12\pm\sqrt{145}}$; $-7, -3, -5\pm\sqrt{3}.$

17. $-2, -6, -7, -1$

18. $6, 3\pm\sqrt{-3}.$

19. $1, -2+3w, -2+3w^2.$

20. $2\pm\sqrt{2}, 2\pm\sqrt{3}.$

பயிற்சி 2 (h)

1. $y^3 - 56y^2 + 980y - 5424 = 0$

3. $y^3 - 6py^2 + 3(3p^2 + q)y - 9pq + r = 0.$

4. $y^3 + (2q + p - p^2)y^2 + (q^2 + q + 3r - pq - 2pr)y$
$+ r(q + 1 - p - r) = 0.$

5. $y^3 - 6y^2 - 27y + 5 = 0$

6. $y^3 - 5y^2 - 2y - 1 = 0$

7. $\frac{1}{2}, 2, 7$

8. $2, 3, 4, -2$

13. $ry^3 - q(1+r)y^2 + p(1+r)^2y - (1+r)^3 = 0$

14. $(p^3 - 4pq + 8r)y^3 + (p^3 - 4pq + 12r)y^2$
$+ (6r - pq)y + r = 0$

15. $y^3 + 6y^2 + 9y + 3 = 0$

16. $y^3 - 18y^2 + 45y - 9 = 0$

17. $9y^3 - 45y^2 + 18y - 1 = 0$

18. (i) $\frac{-(r^2 + 2q^3)}{r^2}$ (ii) $\frac{q}{2r}$ (iii) $\frac{q^2}{r}$.

பயிற்சி 2 (i)

8. 5.

10. (1) ஒரு குறை எண், இரண்டு கற்பனை எண் மூலங்கள்.
(2) ஒரு குறை எண், இரண்டு கற்பனை எண் மூலங்கள்.
(3) எல்லா மூலங்களும் மெய்யானவை.

12. $-2 \leqslant e \leqslant 2.$

13. (1) $-\frac{4}{27} \leqslant k \leqslant 0$ (2) $4 \leqslant k \leqslant 5$ (3) $0 \leqslant k \leqslant 5.$

பயிற்சி 2 (j)

1\. (1) $-\frac{5}{2},\ -\frac{5}{2},\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

(2) $-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 4$

(3) $3,\ 3 \pm 2i$

(4) $\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}$

(5) $1,\ 1,\ 1\ \ -1 \pm \sqrt{-2}$

(6) $\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -2$

(7) $-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ -\frac{1}{3}.$

(8) $2,\ 2,\ 5$

(9) $-2,\ -2,\ 3,\ 3$

(10) $3,\ 3,\ -1,\ -1,\ -1.$

2\. $k = 0.$

பயிற்சி 2 (k)

(3) 3.

(4) (i) 3

(ii) 3

(5) (i) 3; $(-3, -2),\ (0, 1),\ (3, 4)$

(ii) 2; $(-3, -2),\ (0, 1)$

(iii) 1; $(1, 2)$.

பயிற்சி 2 (l)

(1) $3,\ 6,\ -4$ (2) $6,\ -7,\ \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{2}$

(3) $2,\ 2,\ 3,\ -5$ (4) $1,\ -1,\ 10,\ 1 \pm \sqrt{-5}$

(5) $-\frac{1}{2}$, 8, 8 (6) $\frac{3}{2}, -1, \frac{-1 \pm 3i}{2}$

(7) $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$ (8) $1, 2, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(9) $-1, 3, 5, \frac{2}{3}$ (10) $1, 3, -\frac{1}{2}, \pm\sqrt{-2}$.

பயிற்சி 2 (m)

1. 4·2644 2. 1·6467 3. 1·3195
4. 213 5. 2·59 6. 2·09455
7. 3·1768 8. 0·5616 9. 6·26 10. 43·5
11. (i) 4·26 (ii) 2·059 (iii) −2·096.
12. (i) 2·20 (ii) 2·69 (iii) 2·41 (iv) 2·9537 (v) 3·0514
13. (i) −1·52 (ii) 3·072, −1·534 (iii) −2·235.

பயிற்சி 2 (n)

1. எல்லாத் தீர்வுகளும் மெய்யெண் தீர்வுகள்.
2. இரண்டு தீர்வுகள் சமம்.
3. இரண்டு தீர்வுகள் கற்பனை; மெய்யெண் தீர்வு குறை மதிப்புடையது.
4. இரண்டு தீர்வுகள் சமம்.

பயிற்சி 2 (o)

1. $2, -1 \pm 3i$
2. $-1, -1, -4$
3. $2, 4, 5$
4. $1, -1, -2$
5. $-4, \frac{1}{2}(3 \pm i\sqrt{3})$

பயிற்சி 2 (p)

1. $1, -1, -4 \pm \sqrt{6}$
2. $1 \pm \sqrt{2}, \quad -3 \pm i$
3. $4, \quad -2, \quad 1 \pm i$
4. $1, \quad -3, \quad 2 \pm \sqrt{5}$
5. $4, \quad -1, \quad \dfrac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$
6. $-2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{15})$
7. $3 \pm i\sqrt{5}, \quad -3 \pm i$
8. $\pm \sqrt{2} - 1, \quad 1 \pm \sqrt{2}\, i$
9. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \pm 1$
10. $1, 2, -2, -3.$

மூன்றும் பாகம்

1. மெய்யெண் தொகுதி

(System of Real Numbers)

1·1. எண் இனத்தில் இயற்கை எண் (Natural Number), முழு எண் (Integers), கூட்டு எண் என்று பல பிரிவுகள் உள்ளன. கணிதம் வளர்ச்சி அடையும்போது எண் இனமும் படிப்படியாக விரிவு படுத்தப் பட்டுள்ளது. கூட்டு முழு எண் தொகுதியிலிருந்து கூட்டுப் பின்னங்கள் உருவாயின. மேலும், குறை முழு எண்கள், குறை பின்னங்கள் முதலியவையும் உருவடைந்தன. இவ்வாறு கிடைக்கப் பெற்ற தொகுதி விகிதமுறு எண்களின் (Rational numbers) தொகுதி எனப்படும்.

எல்லாக் கூட்டு முழு எண்களும், பூச்சியமும், குறை முழு எண்களும் முழு எண் தொகுதியை (System of Integers) அமைக்கும். இத் தொகுதியில் அமைந்த எண்கள் கணக்கற்றவை. எவையேனும் இரு முழு எண்களின் விகிதமாக எழுதக் கூடிய எந்த ஓர் எண்ணும் பகுதி $\neq 0$ எனில் விகிதமுறு எண் எனப்படும். அதாவது ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் p/q என்ற முறையில் அமைந்து இருக்கும். இங்கு p, q கூட்டு முழு எண்களாகவோ, குறை முழு எண்களாகவோ இருக்கலாம். p பூச்சியமாக இருக்கலாம். ஆனல் q பூச்சியமாக இராது.

1, 2, 3 ... என வரும் அடிப்படை எண்கள் இயற்கை எண்கள் அல்லது முழு எண்கள் எனப்படும். இரு கூட்டு முழு எண்களின் கூடுதல் அல்லது பெருக்கல் ஒரு கூட்டு முழு எண்ணுக இருக்கும். ஆனல் கழித்தல், வகுத்தல் என்ற செயல்கள் வரும்போது கூட்டு முழு எண்கள்தாம் அமையவேண்டும் என்பது இல்லை. (எ.- கா.: $2-3=-1$; $\frac{2}{3}$). எனவே கழித்தல், வகுத்தல் என்ற செயல்கள் அமையும்போது குறை முழு எண்கள், பின்னங்கள் உருவாயின.

இவ்வாறு அமைந்த விகிதமுறு எண்களின் தொகுதியின் சில அடிப்படைத் தன்மைகளை இவ்வத்தியாயத்தில் பார்ப்போம்.

1.2. வரிசை அமைப்பு (Order Structure) :

வரிசை :

x, y என்ற இரண்டு விகிதமுறு எண்கள் $x > y$ அல்லது $x < y$ என்று இருக்குமாகில், கீழ்க்கண்ட வரிசை அமைப்புக் கொள்கைகளைப் பூர்த்தி செய்யும்.

(i) x, y, z என்ற மூன்று விகிதமுறு எண்கள் $x > y, y > z$ என்று அமையுமானல், $x > z$ ஆகும்.

(ii) x, y $(x < y)$ என்ற இரு விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையில் z என்ற விகிதமுறு எண் உள்ளது. அதாவது $x < z < y$ என அமையும்.

தெரிப்பு :

$x = \frac{a}{b}$; $y = \frac{c}{d}$ என்ற எவையேனும் இரண்டு விகிதமுறு எண்களை எடுத்துக் கொள்வோம் $(b > 0,\ d > 0)$.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{(கொடுக்கப்பட்டுள்ளது).}$$

எனவே $ad < bc$ ஆகும்.

நாம் $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ என நிறுவலாம்.

$ad < bc$ எனில் $ad + ab < bc + ab$

$$\therefore\ a(b+d) < b\,(a+c)$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}.$$

மேலும் $ad < bc$

$$ad+cd < bc+cd$$

$$\therefore\ d(a+c) < c\,(b+d)$$

$$\therefore\ \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

எனவே $\frac{a+c}{b+d}$ $(=z)$ என்ற விகிதமுறு எண் $\frac{a}{b}$ $(=x)$, $\frac{c}{d}$ $(=y)$ என்ற விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையே உள்ளது. ஆகையால் எவையேனும் இரு விகிதமுறு எண்களுக்கிடையே ஒரு விகிதமுறு எண் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு :

$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ என்பன இரு விகிதமுறு எண்கள். இங்கு $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ ஆனல் இவற்றிற்கிடையே $\frac{5}{7}$ என்னும் விகிதமுறு எண் உள்ளது.

அதாவது $\frac{2}{3} < \frac{5}{7} < \frac{3}{4}$ ஆகும்.

நாம் மேற்கூறியவற்றிலிருந்து கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தை நிறுவலாம்.

1·3. தேற்றம் 1 :

கொடுத்துள்ள இரு விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையில் எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன.

தெரிப்பு :

x, y எவையேனும் இரு விகிதமுறு எண்களாக இருக்கட்டும். $(x < y)$, N ஏதேனும் ஒரு மிகப் பெரிய கூட்டு முழு எண்ணாக இருக்கட்டும். $\alpha = y - x$, $(x < x + \frac{\alpha}{2} < y)$ எனக் கொண்டால், இங்கு $x + \frac{\alpha}{2}$, $x + \frac{\alpha}{2^2}$, $x + \frac{\alpha}{2^3}, \ldots \ldots, x + \frac{\alpha}{2^{N+1}}$ என்ற $(N+1)$ எண்களும் x, y-க்கிடையே அமைந்த விகிதமுறு எண்களாகும்.

எனவே N எவ்வளவு மிகப் பெரிய எண்ணாக இருப்பினும், N-க்கு மேற்பட்ட விகிதமுறு எண்கள் x, y-க்கிடையே அமைந்துள்ளன என்பதைக் காண்கிறோம். அதாவது x, y-க்கு இடையே உள்ள விகிதமுறு எண்கள் கணக்கிலடங்காதவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ — இவற்றிற்கிடையில் $\frac{1}{3}+\frac{1}{6\times 2}$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{6\times 4}$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{6\times 8}$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{6\times 16}$ ... ... என்று வரும் எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன.

குறிப்பு :

(1) M கொடுத்துள்ள மிகப் பெரிய முழு எண்ணுகவும் N கொடுத்துள்ள மிகச் சிறிய முழு எண்ணுகவும் இருந்தால் M, N க்கு இடையே முடிவுள்ள (finite) எண்ணிக்கையில் அமைந்த முழு எண்களே உள்ளன. ஏனெனில் M-ம். N-ம் ஒரே குறியைக் கொண்டிருந்தால் M, N இடையே உள்ள முழு எண்களின் எண்ணிக்கையானது $(M-N-1)$ ஆகும். M கூட்டு மதிப்பும் N குறை மதிப்பும் கொண்டிருந்தாலும் இவ்வெண்ணிக்கை $(M-N-1)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$N=2$, $M=48$ என்றல் இங்கு 2-க்கும், 48-க்கும் இடையே உள்ள முழு எண்களின் எண்ணிக்கை 45 ஆகும். $N=-15$, $M=4$ எனில், இவற்றிற்கிடையேயுள்ள முழு எண்களின் எண்ணிக்கை 18 ஆகும்.

(2) N என்னும் ஏதேனும் ஒரு முழு எண் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அதை அடுத்து முன்னும் பின்னும் அமைந்துள்ள முழு எண்களை உடனே கண்டுபிடிக்கலாம். ஆனல் r கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறு எண் எனில் அதை அடுத்து முன்னே அல்லது பின்னே அமைந்துள்ள விகித முறு எண்கள் எவை என்று கண்டுபிடிக்க இயலாது. ஏனெனில் r-க்கு மிக அருகில் r' என்னும் விகிதமுறு எண் கண்டுபிடித்தாலும் மேலே கூறிய தேற்றத்தின்படி r, r' என்பவற்றின் இடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன. இதிலிருந்து கீழ்கண்ட விளைவை அறிகிறோம்.

r ஒரு விகிதமுறு எண்ணுகவும் ε ஏதேனும் மிகச்சிறிய கூட்டு விகிதமுறு எண்ணுகவும் இருப்பின் r இலிருந்து ε ஐ விடக் குறைவான வித்தியாசத்தில் அமைந்த எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம். ஏனெனில் $r+\varepsilon$ ஒரு விகிதமுறு எண்.

எனவே r, $r+\varepsilon$ இடையே அமைந்துள்ள விகிதமுறு எண்கள் எண்ணற்றவை.

1·4. கூட்டல் :

a, b எவையேனும் இரண்டு விகிதமுறு எண்களானால் $a+b$-ம் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும். விகிதமுறு எண்களின் கூடுதல் கீழ்க்கண்ட விதிகளுக்கு உட்பட்டு அமைந்துள்ளன.

(i) மாற்று விதி (Commutative law) : a, b என்பன இரண்டு விகிதமுறு எண்களானால், $a+b = b+a$.

(ii) சேர்ப்பு விதி (Associative law) : a, b, c எவையேனும் மூன்று விகிதமுறு எண்கள் ஆனுல் $(a+b) + c = a+(b+c)$

(iii) மாற்றிலி உறுப்பு (பூச்சியம்) அமைந்திருத்தல் (Existence of additive identity) : $a + 0 = a$ ஆகும்.

(iv) எதிர்மாறு உறுப்பு அமைந்திருத்தல் : (Existence of additive inverse) : ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணையும் அதன் குறை மதிப்புடன் கூட்டுவதால் பூச்சியம் ஆகும்.

அதாவது 'a' என்ற விகிதமுறு எண்ணுேடு அதன் குறை மதிப்பு '$-a$' ஐக் கூட்டினுல் நமக்குக் கிடைப்பது பூச்சியம்.

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

(v) ஒரியல்பு விதி (Monotony law) ; $a, b, (a < b)$ என்ற விகிதமுறு எண்கள்,

$$a+c < b+c \text{ என்று அமைந்திருக்கும்.}$$

1·5. பெருக்கல் :

a, b எவையேனும் இரண்டு விகிதமுறு எண்களானுல் $a \cdot b$-ம் கூட ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும். விகிதமுறு எண்களின் பெருக்கல் கீழ்க்கண்ட விதிகளுக்கு உட்பட்டுள்ளன.

(i) மாற்று விதி :

$$ab = ba.$$

சேர்ப்பு விதி :

a, b, c என்பன மூன்று விகிதமுறு எண்களானுல்,

$$(ab)\ c = a\ (bc)$$

மாற்றிலி உறுப்பு அமைந்திருத்தல் :

'a' என்ற விகிதமுறு எண்ணை '1'ஆல் பெருக்கினுல் கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறு எண் 'a'-யே கிடைக்கும்.

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

எதிர்மாறு உறுப்பு அமைந்திருத்தல் :

பூச்சியமாக இல்லாத ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண் 'a'க்கும் ஒத்தவாறு a^{-1} என்ற விகிதமுறு எண், $a \cdot a^{-1} = 1$ என அமைந்து இருக்கும்.

பங்கீட்டு விதி (Distributive Law) :

$a(b+c) = ab+ac$. இவ்விதி கூட்டல், பெருக்கல் என்ற இரு செயல்களுடன் தொடர்புடையது.

ஒரியல்பு விதி :

$a, b\ (a > b)$ என்ற இரு விகிதமுறு எண்களை $c\ (c > 0)$ ஆல் பெருக்கினுல் $ac > bc$ என அமையும்.

1·6. தேற்றம் 2 :

$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ கொடுத்துள்ள இரு கூட்டு விகிதமுறு எண்கள் எனில், $n\left(\frac{a}{b}\right) > \frac{c}{d}$ என்ற முறையில் n என்னும் கூட்டு முழு எண் உள்ளது.

குறிப்பு :

a, d என்பன கூட்டு முழு எண்களாதலின்,

$$ad \geqslant 1$$

$$bc \cdot ad \geqslant bc$$

$$\therefore\ ad + bc \cdot ad \geqslant bc + 1 > bc$$

$$(1+bc)\,ad > bc$$

$$(1+bc) = n \text{ (கூட்டு முழு எண்)}$$

$$n \cdot ad > bc$$

$$\frac{na}{b} > \frac{c}{d}$$

எடுத்துக்காட்டு :

$\frac{11}{15}$, $\frac{5}{6}$ என்பவை இரு கூட்டு விகிதமுறு எண்கள் ஆனுல்

$$5 \cdot \frac{11}{15} = \frac{11}{3} > \frac{5}{6}.$$

1·7. விகிதமுறு எண்களின் பகுப்பு (Sections of Rational Number)

விகிதமுறு எண்களின் தொகுதியைக் கீழ்க்கண்டவாறு L, U என்ற இரு வகுப்புகளாகப் பிரிக்கலாம்.

(i) ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் ஓர் எண்ணுவது அமைந்து இருக்கும்.

(ii) ஒவ்வோர் எண்ணும் L, U என்பவற்றுள் ஏதேனும் ஒரு வகுப்பில் அமைந்து இருக்கும்.

(iii) L-ல் உள்ள ஒவ்வோர் எண்ணும் U-ல் அமைந்த ஒவ்வோர் எண்ணையும் விட மதிப்பில் குறைவானது.

இவ்வாறு விகிதமுறு எண்களை L, U என்ற இரு வகுப்புகளாகப் பிரிப்பது விகிதமுறு எண்களின் பகுப்பு (Section) எனப்படும். இதை (L, U) எனக் குறிப்பிடுகிரேும். L, U முறையே வெட்டின் கீழ்ப் பகுப்பு, மேல் பகுப்பு எனப்படும்.

மேற் குறித்த பகுப்பு மூன்று வகைப்படும். அவைகள் முறையே

(1) L-ல் மீப்பெரு உறுப்பு அமைய U-ல் மீச்சிறு உறுப்பு இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு :

5-ம் 5 ஐ விடச் சிறியவை L-லும், 5 ஐ விடப் பெரியவை U-லும் அமைக்கப்பட்ட (L, U) ஒரு பகுப்பாகும். ஏனெனில் இது மேற் குறிப்பிட்ட மூன்று தன்மைகளைப் பெற்றுள்ளது. இங்கு L-க்கு மீப்பெரு உறுப்பு 5 ஆகும். U-ல் மீச்சிறு உறுப்பில்லை.

(2) U-ல் மீச்சிறு உறுப்பு அமைய L-ல் மீப்பெரு உறுப்பு இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு :

4-ம், 4-க்கு மேலேயும் உள்ளவை U-லும், 4 ஐ விடச் சிறியவை L-லும் அமைக்கப்பட்ட (L, U) ஒரு பகுப்பாகும். இப் பகுப்பும் மேற் கூறிய மூன்று தன்மைகளைப் பெற்றுள்ளது. இங்கு U-க்கு மீச்சிறு உறுப்பு 4 ஆகும். Lக்கு மீப்பெரு உறுப்பு இல்லை.

(3) L-ல் மீப்பெரு உறுப்பும் இல்லை. U-ல் மீச்சிறு உறுப்பும் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு :

எதிர் விகிதமுறு எண்கள், பூச்சியம், கூட்டு விகிதமுறு எண்களில் அவற்றின் வர்க்கம் 2-க்கும் குறைவாக இருந்தால் அவ்வாறுள்ள எண்களை L-லும், கூட்டு விகிதமுறு எண்களின் வர்க்கம் 2-க்கும் அதிகமாகக் கொண்ட கூட்டு விகிதமுறு எண்களை U-லும் அமையுமாறு எடுத்துக் கொள்வோம். இப் பகுப்பில் எந்த ஒரு விகிதமுறு எண்ணும் L, U என்பவற்றுள் ஏதேனும் ஒரு வகுப்பில் அமையாமல் விடுபட்டுப் போகவில்லை எனக் காண்பிக்க வேண்டும். இதற்கு வர்க்கம் 2 எனக் கொண்ட விகிதமுறு எண் இல்லை என நிறுவ வேண்டும்.

$x^2 = 2$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், இச்சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் விகிதமுறு எண் எதுவும் இல்லை. முடியுமானால் $\frac{p}{q}$ என்ற விகிதமுறு எண்ணின் வர்க்கம் 2 எனக் கொள்வோம். p, q என்பன பொதுக் காரணி இல்லாத முழு எண்கள். எனவே $\frac{p^2}{q^2} = 2$. அதாவது $p^2 = 2q^2$; வலக்கைப் புறம் ஓர் இரட்டைப் படை எண். எனவே p^2 என்பதும் ஓர் இரட்டைப் படை எண்ணாகும். ஆகையால் p இரட்டைப் படை எண். எனவே $p = 2m$ என்றாகும்.

$$\therefore \quad 4m^2 = 2q^2.$$

$$2m^2 = q^2.$$

ஆகையால் q^2 ; எனவே, q-ம் இரட்டைப் படை எண்ணாகும். எனவே, p, q என்ற இரண்டும் இரட்டைப் படை எண்களாதலால் இவற்றிற்கு '2' என்ற பொதுக் காரணி உள்ளது. இது நமது கொள்கைக்கு முரண்பாடானது. எனவே, 2 ஐ வர்க்கமாகக் கொண்ட விகிதமுறு எண்கள் எதுவும் இல்லை.

அடுத்து L-ல் மீப்பெரு உறுப்பு இல்லை, U-ல் மீச்சிறு உறுப்பு இல்லை என நிறுவுவோம். முடியுமானால் $k, (0 < k)$ L-ன் மீப்பெரு உறுப்பாக இருக்கட்டும். எனவே, $k^2 < 2$.

$\frac{4+3k}{3+2k}$ என்ற கூட்டு எண்ணை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$2-\left(\frac{4+3k}{3+2k}\right)^2=\frac{2-k^2}{(3+2k)^2}>0 \text{ எனவே, } \left(\frac{4+3k}{3+2k}\right)^2>2$$

ஆதலால் $\frac{4+3k}{3+2k}$, L-ல்அமையும்.

மேலும், $\frac{4+3k}{3+2k}-k=\frac{2(2-k^2)}{3+2k}>0$ அதாவது, $\frac{4+3k}{3+2k}>k$

இப்பொழுது கூட்டு எண் $\frac{4+3k}{3+2k}$, வகுப்பு L-ல் அமைந்துள்ள k ஐ விடப் பெரிய எண். ஆனல் இது நாம் எடுத்துக் கொண்ட கொள்கைக்கு முரண்பாடானது. எனவே, L-க்கு மீப்பெரு உறுப்பு இல்லை. இதேபோன்று U-க்கு மீச்சிறு உறுப்பு இல்லை என்று நிறுவலாம்.

மேற்கண்ட எடுத்துக் காட்டால் நாம் விகிதமுறு எண்கள் அல்லாத புதிய வகையான எண்களை வரையறை செய்ய வேண்டும். அவைகளையே விகிதமுரு (Irrationals) எண்கள் என அழைக்கிறோம். அதாவது இரு முழு எண்களின் விகிதமாக எழுத முடியாத எண்கள் விகிதமுரு எண்கள் எனப்படும்.

இவ்வாறு மேற்கூறிய மூன்று வகை பகுப்புகளைத் தவிர வேறு எந்த நிலையும் இத்தகைய பகுப்பில் அமையாது எனக் காட்டலாம். அதாவது L-ல் மீப்பெரு உறுப்பும், அதே சமயத்தில் U-ல் மீச்சிறு உறுப்பும் கொண்ட (L, U) என்ற பகுப்பு இருக்க முடியாது என நிறுவலாம். இது தெளிவு. ஏனெனில் L-ன் மீப்பெரு உறுப்பு x எனவும், U-ன் மீச்சிறு உறுப்பு y எனவும் கொண்டால் x, y-க்கு இடையே உள்ள எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் L, U என்ற வகுப்புகளில் எதிலும் அமைந்து இரா. இவ்வாறெனில், L, U என்பவைகள் ஒரு பகுப்பை அமைக்க முடியாது.

ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணுக்கும் ஒத்தவாறு இரு பகுப்புகள் கிடைக்கின்றன. அவ்வெண் கீழ் வகுப்பின் மீப்பெரு உறுப்பாகவோ அல்லது மேல் வகுப்பின் மீச்சிறு உறுப்பாகவோ இருப்பதைப் பொறுத்து இரு பகுப்புகள் உள்ளன. இவ்வாறு இரு பகுப்புகள் வராதபடி, ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணுக்கும் ஒரே பகுப்பு வரும்படி மெய்யெண் கொள்கையைச் சற்று மாற்றி அமைத்துக் கொள்ளலாம். அதாவது கீழ் வகுப்பிற்கு மீப்பெரு உறுப்பு இருத்தல் கூடாது எனக் கொள்ளுவதன் மூலம் மெய்யெண்

வரையறையைச் சற்று மாற்றி அமைக்கிறோம். இதன்படி விகிதமுறு எண்களை L, U என்ற வகுப்புகளாகப் பிரிப்பது ஒரு பகுப்பு எனில்,

(1) ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் ஓர் உறுப்பேனும் உண்டு. (2) ஒவ்வோர் எண்ணும் ஏதேனும் ஒரு வகுப்பில் அமைந்து இருக்கும். (3) L-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் U-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பை விடக் குறைவானது. (4) L-க்கு மீப்பெரு உறுப்பு கிடையாது எனப் பெறுகிறோம்.

இனி வரும் பகுதியில் விகிதமுறு எண்களின் பகுப்பை இவ் வரையறையின் அடிப்படையிலேயே குறிப்பிடுவோம்.

குறிப்பு :

இதேபோன்று U-க்கு மீச்சிறு உறுப்பு கிடையாது என்பதை மட்டும் கொண்டும் மெய்யெண் வரையறையைச் சிறிது மாற்றம் செய்யலாம்.

1·8. பகுப்பின் ஒரு தன்மை

k என்பது ஏதேனும் ஒரு எவ்வளவு மிகச்சிறிய நேர் எண்ணு யினும் L-ல் x என்ற ஓர் உறுப்பும், U-ல் y என்ற ஓர் உறுப்பும் $y - x = k$ என்றபடி அமைந்துள்ளன.

தெரிப்பு :

a, b முறையே L, U-ல் அமைந்திருக்கட்டும். $nk > b - a$ அதாவது $a + nk > b$ என்ற சமனின்மைக்கு ஏற்ப n என்ற ஒரு கூட்டு முழு எண் இருக்கும்.

$a, (a+k), (a+2k) \ldots (a+nk)$ என்ற எண்களை எடுத்துக் கொண்டோமானால், a என்ற எண் L-லும் $a+nk$ என்ற எண் U-லும் இருக்கும். ஆகையால்,

$x = a + rk$; $y = a + (r+1)k$ என்ற அடுத்தடுத்த இரண்டு எண்கள், x ஆனது L-லும் y ஆனது U-லும் அமையுமாறு இருக்கும். எனவே இங்கு $y - x = k$ ஆகும்.

1·9. மெய்யெண் (வரையறை) (Definition of real number)

விகிதமுறு எண்களின் ஒரு பகுப்பு மெய் எண் எனப்படும்.

மெய் விகிதமுறு எண்; விகிதமுறா எண் (வரையறை); (Real rational number; irrational number)

ஒரு பகுப்பின் மேல் வகுப்பில் மீச்சிறு உறுப்பு இருப்பின் அப் பகுப்பு மெய் விகிதமுறு எண் எனவும், மேல் வகுப்பில் மீச்சிறு உறுப்பு இல்லாவிடில் அப் பகுப்பு மெய் விகிதமுறா எண் எனவும் கூறப்படும்.

a என்ற விகிதமுறு எண் மேல் வகுப்பு U-ன் மீச்சிறு உறுப்பு எனில், இதை (L, U) என்ற மெய் விகிதமுறு எண்ணின் ஒத்த விகிதமுறு எண் எனக் கூறுகிறோம். a என்ற விகிதமுறு எண்ணிற்கு ஒத்த மெய் விகிதமுறு எண்ணை $\bar{a}$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

1·10. விகிதமுறு எண்கள், மெய் விகிதமுறு எண்கள்-இவற்றின் ஒன்றுக்கு ஒன்று ஒத்த தன்மை (One to one correspondence between rational and real rational number)

மேற் குறித்த வரையறையிலிருந்து a என்னும் ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணுக்கு ஒத்த (L, U) என்னும் ஒரே ஒரு மெய் விகிதமுறு எண்தான் அமைந்துள்ளது எனக் காணலாம். இங்கு a ஐ விட மதிப்பில் குறைந்த விகிதமுறு எண்கள் கீழ்வகுப்பு L-லும் a ஐ விட மதிப்பில் அதிகமான விகிதமுறு எண்கள் மேல் வகுப்பு U-லும் அமைந்துள்ளன. மேலும் (L, U) என்னும் ஒவ்வொரு மெய் விகிதமுறு எண்ணிற்கும் ஒத்து அமைந்துள்ள ஒரே ஒரு விகிதமுறு எண் மேல் வகுப்பு U-ன் மீச்சிறு உறுப்பாகும். எனவே விகிதமுறு எண்களுக்கும், மேல் வகுப்பில் மீச்சிறு உறுப்பைக் கொண்ட பகுப்புகள் எல்லாவற்றிலும் கொடுக்கப்படும் மெய் விகிதமுறு எண்களுக்கும் இடையே ஒன்றுக்கொன்று ஒத்த தொடர்பு உள்ளது.

1·11. மெய்யெண்களுக்கு இடையேயுள்ள வரிசைத் தொடர்பு (Relation of order between real numbers)

$\alpha_1 \equiv (L_1, U_1)$, $\alpha_2 \equiv (L_2, U_2)$ என்பவை இரண்டு மெய் விகிதமுறு எண்கள்.

(i) L_1-ன் எல்லா உறுப்புகளும் L_2-ல் இருக்கும். ஆனால், L_2-ன் சில உறுப்புகள் L_1-ல் இரா து. அப்பொழுது L_1 ஐ, L_2-ன் சரியான பகுதி (Proper part) என்று அழைக்கிறோம்.

(ii) L_2-ன் எல்லா உறுப்புகளும் L_1-ல் இருக்கும். ஆனால் L_1-ன் சில உறுப்புகள் L_2-ல் இராது. எனவே L_2, L_1-ன் சரியான பகுதியாகும்.

(iii) L_1-ன் எல்லா உறுப்புகளும் L_2-லும், L_2-ன் எல்லா உறுப்புகளும் L_1-லும் இருக்குமாகில், L_1, L_2 ஆகிய இரண்டும் முற்றிலும் சமம்.

வரையறை :

$\alpha_1 \equiv (L_1, U_1)$, $\alpha_2 \equiv (L_2, U_2)$ என்ற இரண்டு மெய் யெண்கள் (i) $\alpha_1 < \alpha_2$, (ii) $\alpha_1 > \alpha_2$ (iii) $\alpha_1 = \alpha_2$ என்று அமைந்திருந்தால் முறையே (i) L_1, L_2-ன் சரியான பகுதி ஆகும். (ii) L_2, L_1-ன் சரியான பகுதி ஆகும் (iii) L_1, L_2 இரண்டும் சரி சமமாகும்.

குறிப்பு :

L_2-ல் மீச்சிறு உறுப்பு இல்லையாகையால், L_1, L_2-ன் சரியான பகுதியாக இருக்கும்போது L_1-ல் இல்லாத கணக்கற்ற எண்கள் L_2-ல் உள்ளன. எனவே இவ்வெண்கள் U_1-ன் உறுப்புகள் ஆகும்.

1·12. வரையறை : பூச்சியம் $\overline{O}$, கூட்டு, குறை மெய்யெண்கள்

பூச்சியம், U-ன் மீச்சிறு உறுப்பெனின், (L, U) என்ற விகித முறு எண் அதாவது $\overline{O}$ பூச்சியம் என்ற மெய் எண் எனப்படும்.

பூச்சியத்தை $(\overline{O})$ விடக் குறைவான மெய்யெண் குறை மெய் யெண் எனவும், பூச்சியம் $\overline{O}$ஐ விட அதிகமான மதிப்புடைய மெய்யெண்கள் கூட்டு மெய்யெண்கள் எனவும் கூறப்படும்.

எனவே (L, U) ஒரு கூட்டு மெய்யெண் எனில் L-ல் குறைந்தது ஒரு கூட்டு மெய் விகிதமுறு எண் இருக்கும். இதேபோன்று U-ல் குறைந்தது ஒரு குறை மெய் விகிதமுறு எண் இருக்குமாகில் (L, U) என்பது ஒரு குறை மெய்யெண்ணாகும்.

1·13. தேற்றம் 3 :

α, β, γ என்பவை $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ என்று அமைந்த மூன்று மெய்யெண்களானால், $\alpha < \gamma$ ஆகும்.

தேரிப்பு :

$\alpha \equiv (L_1\ U_1)$, $\beta \equiv (L_2, U_2)$, $\gamma \equiv (L_3, U_3)$ என இருக் கட்டும்.

$\alpha < \beta$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், L_1-ன் எல்லா உறுப்புகளும் L_2-ல் அமையும், அதேபோல்,

$\beta < \gamma$ ஆகையால் L_3-ன் எல்லா உறுப்புகளும் L_2-ல் அமையும். எனவே, L_1-ன் எல்லா உறுப்புகளும் L_2-ல் அமையும்.

மேலும், L_2-ல் உள்ள ஏதேனும் ஓர் உறுப்பு L_3-ல் இல்லை. ஆகையால் L_1-லும் இல்லை. எனவே, L_1, L_2-ன் சரியான பகுதியாகும். $\therefore\ \alpha < \gamma$ ஆகும்.

1·14. தேற்றம் 4 :

$\alpha \equiv (L, U)$ என்ற மெய்யெண்ணின், L, U என்ற வகுப்புகளில் அமைந்த எவையேனும் உறுப்புகள் முறையே a, b எனில்,

$$\bar{a} < \alpha, \quad \bar{b} \geqslant \alpha.$$

தெரிப்பு :

$\bar{a} \equiv (L_1, U_1)$, $\bar{b} \equiv (L_2, U_2)$ என்றால், a, b முறையே U_1, U_2-ன் மீச்சிறு உறுப்புகளாகும். எனவே, L_1-ன் உறுப்புகள், a என்ற விகிதமுறு எண்ணை விடக் குறைவானவை. ஆனால் 'a' L-ன் ஓர் உறுப்பாகும். ஆகையால் L_1, L-ன் சரியான பகுதி. $\therefore\ \bar{a} < \alpha$.

b, U-ன் மீச்சிறு உறுப்பு எனில், $\bar{b} \equiv (L_2, U_2)$ என்பதால் L, L_2 என்ற இரண்டு வகுப்புகளும் சரி சமமானவை. $\therefore\ \alpha = \bar{b}$

b ஆனது U-ன் மீச்சிறு உறுப்பாக இல்லாவிடில் L ஆனது L_2-ன் சரியான பகுதி ஆகும்.

$\therefore\ \alpha < \bar{b}$.

1·15. தேற்றம் 5 :

எவையேனும் இரண்டு மெய்யெண்களுக்கு இடையே எண்ணற்ற மெய் விகிதமுறு எண்கள் உண்டு.

தெரிப்பு :

$\alpha_1 \equiv (L_1, U_1)$, $\alpha_2 \equiv (L_2, U_2)$ என்பன இரண்டு வேறுபட்ட மெய்யெண்களாக இருக்கட்டும்

$\alpha_1 < \alpha_2$ என்று எடுத்துக் கொண்டால் L_1, L_2-ன் சரியான பகுதியாகும். எனவே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் L_2-ல் அமைந்தும் L_1-ல் அமையாமலும் இருக்கும்.

எனவே இவ்வெண்கள் U_1-ல் இருக்கும்.

இவ்வெண்ணெற்ற விகிதமுறு எண்களில் ஏதேனும் ஒரு விகிதமுறு எண் 'a' ஐ எடுத்துக் கொண்டால் (a ஆனது U_1-ன் மீச்சிறு உறுப்பு இல்லை),

$$\alpha_1 < \overline{a} < \alpha_2 \text{ (தேற்றம் மூலம்)}$$

இவ்வாறு நாம் α_1, α_2-க்கு இடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்களைக் காணலாம்.

1·16. தேற்றம் 6 :

a, b எவையேனும் இரு விகிதமுறு எண்கள்,

$a < b$ ஆனால் $\overline{a} < \overline{b}$

$a = b$ ஆனால் $\overline{a} = \overline{b}$

$a > b$ ஆனால் $\overline{a} > \overline{b}$

தெரிப்பு :

$\overline{a} = (L_1\ U_1)$, $\overline{b} \equiv (L_2\ U_2)$ என இருக்கட்டும்.

எனவே a, b என்பவைகள் முறையே U_1, U_2 என்பவைகளின் மீச்சிறு உறுப்புகளாகும்.

$a < b$ ஆனால் a ஐ விடக் குறைவான ஒரு விகிதமுறு எண் b ஐ விடவும் குறைவானதாகும். எனவே L_1-ல் உள்ள ஒவ்வோர் எண்ணும் L_2-ல் அமைந்திருக்கும். மேலும் a, b-க்கு இடையே அமைந்த எல்லா விகிதமுறு எண்களும் L_2-ல் இருக்கும். ஆனால் L_1-ல் இராது. ஆகையால் L_1, L_2-ன் சரியான பகுதியாகும்.

$\therefore\ \overline{a} < \overline{b}.$

$a > b$ என்றால் $b < a$ ஆகும். மேற் கூறியபடி

$\overline{b} < \overline{a}$ ஆகும். $\therefore\ \overline{a} > \overline{b}.$

$a = b$ என்றால் $\overline{a} = \overline{b}$ என்பது தெளிவு.

1·17. இரு மெய்யெண்களின் கூடுதல் : (Sum of two real numbers)

வரையறை :

$\alpha_1 \equiv (L_1, U_1)$, $\alpha_2 \equiv (L_2, U_2)$ என்ற மெய்யெண்களின் கூடுதல் $\alpha \equiv (L, U)$ என்ற மெய்யெண் ஆகும். இங்கு L_1-ன் உறுப்புகளை L_2-ன் உறுப்புகளோடு கூட்டிப் பெறப்படும் எல்லா விகிதமுறு எண்களையும் கொண்ட வகுப்பு L ஆகும்.

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

தெரிப்பு :

$\alpha_1 \equiv (L_1, U_1)$, $\alpha_2 \equiv (L_2, U_2)$ - இவை எவையேனும் இரு மெய்யெண்களாக இருக்கட்டும். L_1-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் L_2-ன் உறுப்புடன் கூட்டி அமைக்கப்பட்ட எண்களை L என்ற ஒரு வகுப்பாகக் கொள்வோம். எனவே L-ல் ஓர் உறுப்பாகிலும் அமைந்து இருக்கும். L எல்லா விகிதமுறு எண்களையும் கொண்டது அன்று.

அடுத்து a, L-ல் ஓர் உறுப்பாக இருக்கட்டும். எனவே $a = a_1 + a_2$ என இருக்கும். a_1, L_1 - லும், a_2 L_2 - லும் அமைந்த உறுப்புகளாகும். b, a ஐ விடக் குறைந்த ஏதேனும் ஒரு விகித முறு எண்ணாக இருக்கட்டும். x ஒரு கூட்டு விகிதமுறு எண் எனில் $b = a - x$ என்று எழுதலாம்.

$$b = (a_1 + a_2) - x$$
$$= (a_1 - x) + a_2$$

$a_1 - x < a_1$. a_1, L_1-ல் இருப்பதால் $a_1 - x$-ம் L_1-ல் அமையும். மேலும் a_2, L_2-ல் ஓர் உறுப்பாகும். எனவே, b என்பது, $(a_1 - x)$ என்ற L_1-ன் ஓர் உறுப்பு, a_2 என்ற L_2-ல் ஓர் உறுப்பு ஆகியவற்றின் கூடுதலாக அமைந்துள்ளது. ஆகவே b, L-ல் அமைந்திருக்கும்.

L_1, L_2-க்கு மீப்பெரு உறுப்புகள் இல்லாததால் L-லும் மீப்பெரு உறுப்பு இல்லை. இந்த நிலையில் L ஒரு பகுப்பின் கீழ்ப் பகுப்பாக அமையும். இப்பொழுது L-ல் அமையாத விகிதமுறு எண்களை U என்ற வகுப்பில் கொண்டால் (L, U) என்ற பகுப்பு (L_1, U_1), (L_2, U_2) என்பவற்றின் கூடுதல் எனப்படும். இதை நாம்,

$(L, U) = (L_1, U_1) + (L_2, U_2) \equiv \alpha_1 + \alpha_2$ என எழுதுகிறோம்.

1·18. குறை மெய்யெண்

U-ல் மீச்சிறு உறுப்பு இருக்குமேயாகில், அந்த உறுப்பைத் தவிர, மற்ற U-ன் எல்லா உறுப்புகளின் குறை மதிப்புகளை உடைய மெய் விகிதமுறு எண்களை L_1-ல் அமைத்து, L_1 என்ற வகுப்பை எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே L_1-ல் மீப்பெரு உறுப்பு இல்லை என்பது தெளிவு.

L_1 ஆனது பகுப்பின் கீழ் வகுப்பு என நிறுவ, L_1-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணை விடக் குறைவான விகிதமுறு எண்ணும் L_1-ன் உறுப்பே என்று நிறுவ வேண்டும்.

α_1', ஒரு விகிதமுறு எண் $< \alpha_1 \ (\in L_1)$ என இருக்கட்டும்.

$-(-\alpha_1) = \alpha_1$, அதாவது $(-\alpha_1)$-ன் குறை மதிப்பு ஆதலால் $-\alpha_1 \in U$. மேலும் $\alpha_1' < \alpha_1$ ஆதலால்,

$$-\alpha_1' > -\alpha_1$$

எனவே, $-\alpha_1'$-ம் U-ன் ஓர் உறுப்பாகும். எனவே, $-(-\alpha_1') = \alpha_1'$ என்பது L_1-ன் ஓர் உறுப்பாகும். (L_1, U_1') என்ற பகுப்பில், U_1, L_1-ஐச் சாராத விகிதமுறு எண்களைக் கொண்டுள்ளது. அப்பகுப்பையே குறை மெய்யெண் என்று அழைக்கிறோம். இதை $-\alpha \equiv -(L, U)$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

U என்ற வகுப்பு, U-ன் மீச்சிறு உறுப்பு இருக்குமெனில், அதன் குறை மதிப்பு, L-ன் உறுப்புகளின் குறை மதிப்பு ஆகியவற்றை உறுப்புகளாகக் கொண்டுள்ளது என்பது தெளிவு.

வரையறை :

$\alpha \equiv (L, U)$ என்ற மெய்யெண்ணின் குறை மதிப்பானது (L_1, U_1) ஆகும். அதாவது L_1 என்ற வகுப்பு U-ன் மீச்சிறு உறுப்பு இருக்குமாகில் அதைத் தவிர மற்ற உறுப்புகளின் குறை மதிப்பைப் பெற்ற உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ளது.

1·19. இரண்டு மெய்யெண்களின் வித்தியாசம் (Difference of two real numbers)

α, β என்ற இரண்டு மெய்யெண்களின் வித்தியாசம் $\alpha - \beta$ ஆகும். அதாவது $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ ஆகும்.

1·20. கூட்டலின் அடிப்படை விதிகள் (Fundamental laws of addition)

$\alpha \equiv (L_1, U_1)$, $\beta \equiv (L_2, U_2)$, $\gamma \equiv (L_3, U_3)$ எனக் கொள்வோம்.

1·20·1 மாற்று விதி

$\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ஆகும்.

a_1, a_2 முறையே L_1, L_2-ன் உறுப்புகளாக இருக்கட்டும்.

$\therefore\ a_1 + a_2 = a_2 + a_1$ ஆகும்.

எனவே, L_1-ன் உறுப்புகளோடு L_2-ன் உறுப்புகளைக் கூட்டுவதாலோ அல்லது L_2-ன் உறுப்புகளோடு L_1-ன் உறுப்புகளைக் கூட்டுவதாலோ வரும் இரண்டு வகுப்புகளும் சர்வ சமமாகும்.

1·20.2 சேர்ப்பு விதி

$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

a_1, a_2, a_3 முறையே L_1, L_2, L_3 என்பவற்றின் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பாக இருக்கட்டும்.

$$a_1 + (a_2 + a_3) = (a_1 + a_2) + a_3.$$

எனவே இதன் தெரிப்பும் தெளிவாகும்.

1·20.3 மாற்றிலி உறுப்பு அமைந்திருத்தல் (Existence of additive identity)

$$\alpha + \overline{0} = \alpha.$$

தெரிப்பு :

$\overline{0} \equiv (L', L')$, $\alpha \equiv (L_1, U_1)$, $\alpha + \overline{0} \equiv (L, U)$ என இருக்கட்டும். எனவே, பூச்சியம் U'-ன் மீச்சிறு உறுப்பாக இருப்பதால் L'-ல் உள்ள உறுப்புகள் எல்லாம் குறை மதிப்புள்ளவை. L என்ற வகுப்பு L'-ன் உறுப்புகளையும், L_1-ன் உறுப்புகளையும் கூட்டுவதால் கிடைப்பதாகும். a_1 என்ற L_1-ன் உறுப்பை L'-ல் ஏதேனும் ஓர் உறுப்போடு கூட்டுவதால் வரும் எண்ணுனது a_1 ஐ விடக் குறைவானது. எனவே, அவ்வெண்ணும் L_1-ல் அமையும். எனவே L-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் L_1-ல் உள்ளது.

அடுத்து a_1', L_1-ன் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பாக இருக்கட்டும். L_1-க்கு மீப்பெரு உறுப்பும் இல்லை. ஆதலால் a_1+k $(k>0)$ என்ற உறுப்பு L_1-ல் இருக்கும், (a_1+k) என்ற உறுப்பை L_1-லும், $-k$ என்ற உறுப்பை L'-லும் எடுத்து இவற்றைக் கூட்டிக் கிடைக்கும் $(a_1+k)-k = a_1$ என்ற உறுப்பு L-ல் அமையும். மேலும் a_1, L_1-ன் ஓர் உறுப்பு. எனவே L-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும், L_1-ல் உள்ளது. எனவே L, L_1 வகுப்புகள் இரண்டும் சர்வ சமமாகும்.

$$\therefore \quad (L_1, U_1) = (L, U).$$

அதாவது $\alpha = \alpha + \overline{0}$ ஆகும்.

1·20.4 எதிர்மாறு உறுப்பு அமைந்திருத்தல் (Existance of additive inverse)

$\alpha \equiv (L_1\ U_1)$, $-\alpha \equiv (L, U)$ எனில்

$\alpha + (-\alpha) \equiv \overline{0}$ ஆகும்.

தெளிப்பு :

$\alpha + (-\alpha) \equiv (L'\ U')$ என இருக்கட்டும். $\alpha \equiv (L_1\ U_1)$, $-\alpha \equiv (L, U)$. ஆகையால் L' என்ற வகுப்பு L_1-ன் உறுப்புகளோடு L-ன் உறுப்புகளைக் கூட்டுவதனுல் கிடைக்கும் எண்களைக் கொண்ட வகுப்பாகும். நாம் $\overline{0} \equiv (L'\ U')$ என நிறுவ வேண்டும். அதாவது L'-ல் உள்ள உறுப்புகள் குறை மதிப்புடையவை என்று நிரூபிப்போம்.

$-\alpha \equiv (L, U)$ ஆகையால் L-ன் உறுப்புகள், U_1-ன் மீச்சிறு உறுப்பைத் தவிர மற்ற உறுப்புகளின் குறை மதிப்பைக் கொண்டது.

எனவே a_1, b_1 முறையே L_1, U_1 என்பவைகளின் எவையேனும் உறுப்புகளெனக் கொண்டால், $-b_1$ என்ற எண் L-ல் அமையும். எனவே a_1 ஐயும் $(-b_1)$ ஐயும் கூட்டிக் கிடைக்கும் அமையும். அதாவது $a_1+(-b_1) = a_1-b_1$ என்ற எண் L'-ல் அமையும். $a_1 < b_1$ என்பது தெளிவு. எனவே a_1-b_1 என்பது குறை மதிப்புடையது. எனவே L'-ல் உள்ள உறுப்புகள் குறை மதிப்புடையன. ... ... (1)

k ஏதேனும் ஒரு குறை விகிதமுறு எண்ணுனுல், $b_1-a_1 = -k$ என்று அமையுமாறு a_1, b_1 முறையே L_1, U_1-ன் உறுப்புகளாக அமையும்.

$$b_1 - a_1 = -k$$

$$\therefore\ a_1 + (-b_1) = k.$$

$$a_1 + (-b_1) \in L' \quad \therefore\ k \in L'$$

எனவே, எல்லாக் குறை விகிதமுறு எண்களும் L'-ல் அமையும். எனவே, மேற்கூறியவற்றிலிருந்து பூச்சியம் U'-ன் மீச்சிறு உறுப்பாகும் எனப் பெறுகிறோம்.

$$\therefore\ \bar{0} \equiv (L', U')$$

அதாவது, $\bar{0} = \alpha + (-\alpha)$ ஆகும்.

குறிப்பு :

இத்தன்மையை α-ன் கூட்டலுக்கான எதிர்மாறு உறுப்பு $-\alpha$ என்பதன் மூலம் குறிக்கிறோம்.

1-20.5 கூடுதலின் ஓரியல்பான விதி (Law of Monotony of addition)

$$\alpha > \beta \text{ எனில் } \alpha + \gamma > \beta + \gamma \text{ ஆகும்.}$$

தெரிப்பு :

$\alpha \equiv (L_1, U_1)$ $\quad \beta \equiv (L_2, U_2)$, $\quad \gamma \equiv (L_3, U_3)$
$\alpha + \gamma \equiv (L', U')$, $\quad \beta + \gamma \equiv (L'', U'')$ என இருக்கட்டும். $\alpha > \beta$ ஆகையால் L_2 ஆனது L'-ன் சரியான பகுதியாகும்.

எனவே, L''-ம் L'-ன் சரியான பகுதியாகும். L_2-ல் இல்லாத a_1 என்ற உறுப்பை L_1-ல் எடுத்துக்கொண்டால், a_1, U_2-ல் இருக்கும். $a_1' > a_1$ என்ற உறுப்பை L_1-ல் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$a_1' - a_1 = \epsilon$ (ϵ ஒரு கூட்டு விகிதமுறு எண்), $a_3\ b_3$ முறையே L_3-லும் U_3-லும், $b_3 - a_3 = \epsilon$ என்று இருக்குமாறு எடுத்துக் கொள்வோம். (§ 1.8)

$$a_1' + a_3 = a_1 + \epsilon + b_3 - \epsilon$$

$$= a_1 + b_3.$$

இங்கு $a_1' + a_3$ என்பது a_1' என்ற L_1-ன் ஓர் உறுப்பையும் a_3 என்ற L_3-ன் ஓர் உறுப்பையும் கூட்டிக் கிடைத்த ஓர் எண்ணானது L'-ன் ஓர் உறுப்பாகும்.

மேலும் a_1+b_3 என்பது U_2-ன் உறுப்போடு U_3-ன் உறுப்பைக் கூட்டிக் கிடைத்த U''-ன் உறுப்பாகும். எனவே L'-லும் U''-லும் பொது உறுப்புகள் உள்ளன; ஆனால் L''-ல் இல்லை. ஆகையால் L'', L'-ன் சரியான பகுதியாகும். எனவே $\alpha+\gamma > \beta+\gamma$ ஆகும்.

1·21. தேற்றம் 7 :

a, b எவையேனும் இரு விகிதமுறு எண்களானால், $\overline{a}+\overline{b} = \overline{a+b}$ ஆகும். அதாவது இரு மெய் விகிதமுறு எண்களின் கூடுதல் ஒரு மெய் விகிதமுறு எண்ணாகும்.

தெரிப்பு :

$\overline{a} = (L_1, U_1)$, $\overline{b} = (L_2, U_2)$, $\overline{a+b} = (L, U)$ எனக்கொள்வோம். எனவே a, b, முறையே U_1, U_2-ன் மீச்சிறு உறுப்பாகும். இப்போது நாம் $(a+b)$, U-ன் மீச்சிறு உறுப்பென நிறுவ வேண்டும்.

x, y முறையே L_1, L_2-ன் எவையேனும் உறுப்புகளானால், $x+y$, Lன்' ஓர் உறுப்பாகும்.

$$x < a, \; y < b$$

$$\therefore \; x+y < a+b.$$

$\therefore$ L-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் $a+b$ ஐ விடச் சிறியது.

அடுத்து $a+b-k$ $(k > 0)$ என்ற விகிதமுறு எண்ணை எடுத்துக் கொண்டால் $a+b-k < a+b$ ஆகும். ஆனால்

$$a+b-k = \left(a-\frac{1}{2}k\right) + \left(b-\frac{1}{2}k\right)$$

$$= L_1\text{-ன் ஓர் உறுப்பு} + L_2\text{-ன் ஓர் உறுப்பு}$$

$\therefore$ $(a+b-k)$, L-ன் ஓர் உறுப்பு. அதாவது $(a+b)$ ஐ விடச் குறைவான ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் L-ல் அமைந்துள்ளது.

$\therefore$ $(a+b)$ ஆனது U-ன் மீச்சிறு உறுப்பாகும்.

$$\therefore \; \overline{a+b} = (L, U) = \overline{a} + \overline{b}$$

அதாவது $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$

குறிப்பு :

ஒரு மெய் விகிதமுறு எண், ஒரு விகிதமுரு எண், ஆகிய வற்றின் கூடுதல் ஒரு விகிதமுரு எண் ஆகும்.

1·22. தேற்றம் 8 :

ஒரு மெய் விகிதமுறு எண்ணின் குறை மதிப்பும் ஒரு மெய் விகிதமுறு எண்ணாகும். மேலும் $-(\overline{a}) = (-\overline{a})$.

தெரிப்பு :

$$a + (-a) = 0$$

$$\therefore \ \overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$$

$$\therefore \ -(\overline{a}) = (-\overline{a})$$

குறிப்பு :

இரு மெய் விகிதமுறு எண்களின் வித்தியாசம் ஒரு மெய் விகிதமுறு எண்ணேயாகும். $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a-b}$.

1·23. தேற்றம் 9 :

இரு மெய்யெண்களுக்கிடையே எண்ணற்ற விகிதமுரு எண்கள் உள்ளன.

தெரிப்பு :

$\alpha, \beta \ (\alpha < \beta)$ எவையேனும் இரு மெய் எண்களாக இருக்கட்டும். γ ஏதேனும் ஒரு விகிதமுறு எண் எனக் கொள்வோம்.

$$\alpha < \beta \text{ ஆதலால்}$$

$$\alpha + (-\gamma) < \beta + (-\gamma)$$

$$\therefore \ \alpha - \gamma < \beta - \gamma.$$

இப்பொழுது, $\alpha - \gamma$, $\beta - \gamma$ என்பவற்றிற்கு இடையே $\overline{a}$-ஐப் போன்ற எண்ணற்ற மெய் விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன.

$$\therefore \ \alpha - \gamma < \overline{a} < \beta - \gamma$$

$$[\alpha + (-\gamma)] + \gamma < \overline{a} + \gamma < [\beta + (-\gamma)] + \gamma$$

$$\alpha + [(-\gamma) + \gamma] < \bar{a} + \gamma < \beta + [(-\gamma) + (\gamma)]$$

$$\alpha + \bar{o} < \bar{a} + \gamma < \beta + \bar{o}$$

$$\therefore \ \alpha < \bar{a} + \gamma < \beta.$$

$\therefore \ \bar{a} + \gamma$ என்ற விகிதமுறு எண் α, β என்பவற்றிடையே உள்ளது.

$\therefore \ \alpha, \beta$ என்பவற்றின் இடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன.

1·24. கூட்டுப் பகுப்பின் தன்மை (A property of positive sections)

வரையறை :

ஏதேனும் ஒரு விகிதமுறு எண் $k > 1$-க்கு ஒத்த (L, U) என்ற கூட்டு மெய்யெண் பகுப்பில், x, y என்ற கூட்டு எண்கள் முறையே L, U-ல் $\left(\dfrac{y}{x} = k\right.$ என்ற விகிதத்தில் $\left.\right)$ அமைந்து இருக்கும்.

1·25. இரு மெய்யெண்களின் பெருக்கல்

வரையறை :

$\alpha_1 \equiv (L_1, U_1), \alpha_2 \equiv (L_2, U_2)$ என்ற இரு மெய்யெண்களைப் பெருக்குவதனுல் கிடைக்கும் மெய்யெண் $\alpha \equiv (L, U)$ ஆகும். இங்கு L என்ற வகுப்பு (i) எல்லாக் குறை விகிதமுறு எண்கள் (ii) விகிதமுறு எண் பூச்சியம் (iii) L_1-ல் ஓர் உறுப்பை L_2-ல் உள்ள ஓர் உறுப்போடு பெருக்குவதால் கிடைக்கும் கூட்டு விகித முறு எண்கள், ஆகியவற்றை உறுப்புகளாகக் கொண்டு அமையப் பட்டதாகும்.

இதையே நாம் $(L, U) = (L_1, U_1), (L_2, U_2) \equiv \alpha_1 \cdot \alpha_2$ எனக் குறிப்பிடுகிறேம்.

தேற்றம் :

$\alpha_1 \equiv (L_1, U_1), \alpha_2 = (L_2, U_2)$ என்பவை இரு மெய்யெண் களாக இருக்கட்டும். α_1, α_2 என்ற இரண்டுமே கூட்டு மதிப் புடையனவாக இருப்பின் L_1, L_2 ஆகிய இரண்டு வகுப்பிலும் கூட்டு விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன.

$\alpha \equiv (L, U)$ என்ற பகுப்பை அமைப்போமானால் L என்ற வகுப்பில் (i) எல்லாக் குறை விகிதமுறு எண்கள் (ii) விகிதமுறு எண் பூச்சியம் (iii) L_1-ன் ஓர் உறுப்போடு L_2-ன் ஓர் உறுப்பைப் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் கூட்டு விகிதமுறு எண்கள் உறுப்புகளாக அமைந்து உள்ளன.

L ஒரு பகுப்பின் கீழ் வகுப்பு என இப்பொழுது நிறுவுவோம். L-ல் உறுப்புகள் உள்ளன. L-ல் எல்லா விகிதமுறு எண்களும் இல்லை. அடுத்ததாக L-க்கு மீப்பெரு உறுப்பு இல்லை என்று நிறுவ வேண்டும்.

a, L-ன் ஒரு கூட்டு விகிதமுறு எண்ணாக இருக்கட்டும். மேலும் $a = a_1 a_2$, $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$ என இருக்கட்டும்.

$b < a$ என்ற கூட்டு விகிதமுறு எண்ணை எடுத்துக் கொண்டால் $\dfrac{b}{a} = x$ என இருக்கட்டும். எனவே $0 < x < 1$.

$$\therefore \quad b = ax = (a_1 a_2) x$$

$$= a_1 (a_2 x)$$

a_2 ஐ விடச் சிறிய $a_2 x \in L_2$

ஆகையால் b என்ற கூட்டு விகிதமுறு எண், L_1-ன் ஓர் உறுப்பு a_1 ஐயும், L_2-ல் ஓர் உறுப்பை $a_2 x$ ஐயும் பெருக்கிக் கிடைத்த எண். எனவே b, L-ல் உள்ளது.

மேலும் L_1, L_2 என்பவைகளுக்கு மீப்பெரு உறுப்பு இல்லாததால் L-க்கும் மீப்பெரு உறுப்பு இல்லை. எனவே L, (L, U) என்ற பகுப்பின் கீழ் வகுப்பாக அமைய முடியும் (L, U) என்ற இப்பகுப்பு $(L_1\ U_1)$, $(L_2\ U_2)$ ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலன் எனப்படும்.

இதை $(L, U) = (L_1, L_1), (L_2, U_2) = \alpha_1, \alpha_2$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

தலைகீழ் கூட்டு மெய்யெண் (The reciprocal of a positive real number)

வரையறை :

$\alpha^{-1} \equiv (L, U)$ என்றால், L-ல் (i) எல்லாக் குறை விகிதமுறு எண்களும் (ii) விகிதமுறு எண் பூச்சியம் (iii) $\alpha \equiv (L_1, U_1)$

என்ற பகுப்பில் U_1-ன் மீச்சிறு உறுப்பைத் தவிர மற்ற எல்லா உறுப்புகளின் தலைகீழ் மதிப்புகளைக் கொண்ட எண்களும் உறுப்புகளாக அமையும். எனவே α^{-1} ஐ α-ன் தலைகீழ் மதிப்பு என்கிறோம்.

1·26. இரு மெய்யெண்களின் வகுத்தல்

$\alpha, \beta\ (\beta \neq \overline{0})$ என்பன இரு மெய்யெண்களாகில்

$$\frac{\alpha}{\beta} = (\alpha)\left(\frac{1}{\beta}\right) = \alpha\ \beta^{-1} \text{ ஆகும்.}$$

பெருக்கலின் அடிப்படை விதிகள்

(i) **மாற்று விதி :** α, β இரு விகிதமுறு எண்களெனில் $\alpha\beta = \beta\alpha$ ஆகும்.

(ii) **சேர்ப்பு விதி :** $(\alpha\,\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ ஆகும்.

(iii) **மாற்றிலி உறுப்பு அமைந்து இருத்தல்** (Existance of Multiplication identity):

$\alpha \equiv (L_1\ U_1),\ \overline{1} \equiv (L_2,\ U_2)$ என்றால்

$\alpha\ \overline{1} = \alpha \equiv (L,\ U)$ ஆகும்.

தெரிப்பு :

$\overline{1} \equiv (L_2\ U_2)$ ஆனால் L_2-ல் உள்ள உறுப்புகள் < 1 ஆகும். மேலும் U_2-ன் மீச்சிறு உறுப்பு 1 ஆகும். L என்ற வகுப்பு L_1-ன் ஓர் உறுப்பையும், L_2-ல் ஓர் உறுப்பைப் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் எண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட வகுப்பாகும். எனவே

$a_1 \in L,\ \ a_2 \in L_2$ எனில்

$a_1\ a_2 \in L$ ஆகும். $a_1\ a_2 < a_1 .\ 1 = a_1$.

(ஏனெனில் $a_2 \in L_2$ மேலும் $a_2 < 1$),

$\therefore\ a_1\ a_2$ என்ற L_1 ன் உறுப்பு, a_1 என்ற L_1-ன் உறுப்பை விடக் குறைவானது. எனவே L-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் L_1-ல் அமையும்.

அடுத்ததாக $a_1 \in L_1,\ \ a_2 > a_1$ எனும்படியான $a_2 \in L_1$ ஆக இருக்கட்டும்.

$\frac{a_1}{a_2} < 1$ ஆதலால் $\frac{a_1}{a_2} \in L_2$.

இப்போது $a_1 = a_2 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)$

எனவே $a_1 = L_1$-ன் ஓர் உறுப்போடு L_2-ன் ஓர் உறுப்பின் பெருக்கற் பலனை அமைகிறது.

எனவே a_1; L-ன் ஓர் உறுப்பாகும்.

ஆகவே L_1-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் L-ன் ஓர் உறுப்பாகும்.

எனவே L, L_1 என்ற இரண்டு வகுப்புகளுள் சர்வசமம்.

$\therefore (L, U) = (L_1, U_1)(L_2, U_2)$

$\alpha = \alpha \cdot \bar{1} \; (\alpha > 0)$

$\alpha < 0$ எனில் $(-\alpha)\bar{1} = (-\alpha)$

ஏனெனில் $\alpha \cdot \bar{1} = -[(-\alpha) \cdot \bar{1}]$

$= -(-\alpha) = \alpha.$

(iv) பெருக்கலுக்கான எதிர்மாறு உறுப்பு:

$\alpha \neq 0$ எனில் $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \bar{1}$ ஆகும்.

(v) ஓரியல்பு விதி (Monotany Law):

$\alpha < \beta$, γ கூட்டு மதிப்பைப் பெற்றது

எனில் $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

(vi) இரு மெய் விகிதமுறு எண்களின் பெருக்கற் பலனும் ஒரு மெய் விகிதமுறு எண் ஆகும். மேலும் $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$ ஆகும்.

(vii) பங்கீட்டு விதி (Distributive Law):

$\alpha \equiv (L_1, U_1)$, $\beta(L_2, U_2)$, $\gamma \equiv (L_3, U_3)$

$\alpha(\beta+\gamma) \equiv (L, U)$, $\alpha\beta + \alpha\gamma \equiv (L', U')$

எனில் $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ ஆகும்.

தீர்வு :

α, β, γ கூட்டு மெய்யெண்களாக இருக்கட்டும். குறை விகிதமுறு எண்கள், பூச்சியம், ஆகியவைகள் L-லும், L'-லும் அமையும்.

$a_1 (a_2+a_3)$ என்பது L-ன் ஓர் உறுப்பாகும்.

$a_1 a_2 + a_1' a_3$ என்பது L^1-ன் ஓர் உறுப்பாகும்.

$(a_1, a_1' \in L_1)$

மேலும் $a_1 (a_2+a_3) = a_1 a_2 + a_1 a_3$ ஆகும்.

$a_1 = a_1'$ ஆனால்,

$$a_1 a_2 + a' a_3 \in L'$$

அதாவது $a_1 a_2 + a_1 a_3 \in L'$

$$\therefore \ a_1 (a_1 + a_3) \in L'$$

எனவே $a_1' = a_1$, ஆனால் L'-ன் உறுப்புகள் L-ல் உள்ளன.

எனவே பொதுப்படையாக $a_1 > a_1'$ ஆனால் $a_1'/a' < 1$.

$$a_1' a_3 = a_1 [(a_1'/a_1) a_3] = a_1 a_3' \text{ ஆக இருக்கட்டும்.}$$

$$a_3' = \left(\frac{a_1'}{a_1} a_3 \right) < 1 . a_3 = a_3$$

$$\therefore a_3' \in L_3.$$

$$a_1 a_2 + a_1' a_3 = a_1 a_2 + a_1 a_3' = a_1(a_2 + a_3')$$

$$\therefore a_1 a_2 + a_1 a_3' \in L^1$$

மேலும், $a_1 a_2 + a_1 a_3' = a_1 (a_2 + a_3') \in L$

$\therefore L, L'$ ஆகிய இரு வகுப்புகளும் சர்வ சமம்.

$\therefore \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ ஆகும்.

1·27. டெடிகின்டின் தேற்றம் 10 : (Dedekind's Theorem)

எல்லா மெய்யெண்களையும் (L, U) என்ற இரு வகுப்புகளாகக் கீழ்க்கண்ட முறையில் பிரிக்கலாம்.

(i) ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் ஓர் உறுப்பேனும் உண்டு.

(ii) ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் ஏதேனும் ஒரு வகுப்பில் இருக்கும்.

(iii) கீழ் வகுப்பு L-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் மேல் வகுப்பு U-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பை விடக் குறைவானது.

இவ்வாறெனின் L-ல் மீப்பெரு உறுப்பு உண்டு அல்லது U-ல் மீச்சிறு உறுப்பு உண்டு.

தெரிப்பு :

இப்பொழுது L, U என்பவற்றின் மெய்விகிதமுறு உறுப்புகளுக்கு ஏற்ப அமைந்த விகிதமுறு எண்களை மட்டும் கொண்டு L_1, U_1 என்ற இரு வகுப்புகளை அமைக்கலாம்.

நிலை 1 : L_1-க்கு 'a' என்னும் மீப்பெரு உறுப்பு இருப்பதாகக் கொள்வோம். எனவே a-க்கு ஒத்த மெய் விகிதமுறு எண் $\bar{a}$, L-ல் அமையும். இப்பொழுது $\bar{a}$, L-ன் மீப்பெரு உறுப்பு என நிறுவுவோம். இவ்வாறு இல்லையெனில் $\alpha > \bar{a}$ என்னும்படி α, L-ன் ஓர் உறுப்பாக இருக்கட்டும். இப்பொழுது $\bar{a}$, α இவற்றுக் கிடையே எண்ணற்ற மெய் விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன. அவற்றுள் ஒன்று $\bar{b}$ என இருக்கட்டும். அதாவது,

$$\bar{a} < \bar{b} < \alpha.$$

இப்பொழுது α, L-ன் ஓர் உறுப்பு, மேலும் $\bar{b} < \alpha$. ஆதலால் $b \in L\,\bar{b} \in L_1$. மேலும் $\bar{a} < \bar{b}$ ஆதலால் $a < b$ அதாவது L_1-ன் மீப்பெரு உறுப்பான a ஐ விட அதிக மதிப்புடைய b, L_1-ல் அமைந்துள்ளது. இது முரண்பாடான முடிவாகும். எனவே $\bar{a}$ L-ன் மீப்பெரு உறுப்பாகும்.

நிலை 2: U_1-க்கு x என்ற மீச்சிறு உறுப்பு இருப்பதாகக் கொள்வோம். மேற்கூறியவாறு $\bar{x}$, U_1-ன் மீச்சிறு உறுப்பு என நிறுவலாம்.

நிலை 3 : L_1-க்கு மீப்பெரு உறுப்பும், U_1-க்கு மீச்சிறு உறுப்பும் இல்லாமல் இருக்கட்டும். இந்த நிலையில் (L_1, U_1) என்ற பகுப்பு 'α' என்னும் விகிதமுறு எண்ணாகும்.

L, U - இவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்றில் α அமைந்து இருக்கும்.

(i) α, L-ல் அமைந்திருப்பதாகக் கொள்வோம். இப்பொழுது α, L-ன் மீப்பெரு உறுப்பென நிறுவலாம். இவ்வாறு இல்லையெனில் $\beta > \alpha$ L-ன் ஓர் உறுப்பாக இருக்கட்டும்.

$\alpha < \bar{a} < \beta$ என்னும்படி $\bar{a}$ என்னும் ஏதேனும் மெய் விகித முறு எண் அமைந்திருக்கும். $\beta \in L$ ஆதலால் $\bar{a}$-க்கு ஒத்த a, L-ல் அமைந்து இருக்கும்.

$\alpha \equiv (L_1\ U_1)$ என்ற மெய்யெண்ணின் கீழ் வகுப்பான L-ல் $\bar{a} > \alpha$ என்னும்படி a என்னும் உறுப்பு அமைந்துள்ளது. இது பொருந்தாது (§) எனவே α, L-ன் மீப்பெரு உறுப்பு.

(ii) இதேபோன்று $\alpha \in U$ எனில் α, U-ன் மீச்சிறு உறுப்பு என நிறுவலாம்.

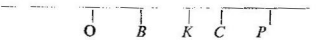
குறிப்பு :

(i) மேற்கூறிய தேற்றத்திலிருந்து மேற் குறித்தவாறு மெய்யெண்களை L, U என்று இரு வகுப்புகளாகப் பிரிக்கும்போது α என்னும் மெய்யெண் α ஐ விடக் குறைந்த ஒவ்வொரு மெய் யெண்ணும் L-லும், α ஐ விட அதிகமான ஒவ்வொரு மெய் யெண்ணும் U-லும் அமையும்படி உள்ளது. α, L-லோ அல்லது U-லோ அமைந்து இருக்கும்.

(2) இத்தேற்றத்திலிருந்து விகிதமுறு எண்களின் பகுப்பிற்கும் மெய்யெண்களின் பகுப்பிற்கும் இடையே உள்ள ஓர் அடிப்படை வேறுபாடு புலனாகிறது. ஏனெனில் (L, U) விகிதமுறு எண்களின் பகுப்பு எனில் L-க்கு மீப்பெரு உறுப்போ, U-ல் மீச்சிறு உறுப்போ இல்லாமல் அமையலாம். ஆனல் (L, U) ஒரு மெய் யெண்களின் பகுப்பு எனில் இவ்வாறு அமைய முடியாது. அதாவது L, U என்ற விகிதமுறு எண்களின் வகுப்புகளுக்கு இடையே இடைவெளி உள்ளது. ஆனல் மெய்யெண்களின் L, U என்ற வகுப்புகளுக்கு இடையே இடைவெளி இல்லை. அதாவது விகிதமுறு எண் தொகுதி பெற்றிராத ஒரு முழுமைத் தன்மையை (Property of Completeness) மெய்யெண் தொகுதி பெற்றுள்ளது.

1·28. விகிதமுறு எண்களை ஒரு நேர் கோட்டின் மீது அமைந்த புள்ளிகளால் குறிப்பிடுதல்

'l' என்னும் முடிவில்லா நேர் கோட்டில், O என்னும் புள்ளியை ஆதியாகவும், OP என்ற தூரத்தை ஓர் அலகு தூரமாகவும் கொண்டால், ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணையும் l என்னும் நேர் கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளியொன்றின் மூலம் குறிக்கலாம். எடுத்துக் காட்டாக x என்பது ஒரு கூட்டு விகிதமுறு எண்ணுயின்



O-விருந்து வலப் புறமாக x. OP என்ற அலகு தூரத்திலுள்ள புள்ளி x என்னும் கூட்டு விகிதமுறு எண்ணைக் குறிக்கும். O என்பது பூச்சியத்தையும் P என்பது ஒன்றையும் குறிக்கும் புள்ளிகளாகும். கூட்டு விகிதமுறு எண்களை O-விருந்து நேர் கோட்டில் வலப் புறமாகவும், குறை விகிதமுறு எண்களை O விற்கு இடப் புறமாகவும் குறிப்பிடுகிறோம். இவ்வாறு விகிதமுறு எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளை விகிதமுறு புள்ளிகள் என்று கூறுகிறோம்.

B, C - இவை இரண்டும் எவையேனும் இரண்டு விகிதமுறு புள்ளிகளாக இருக்கட்டும். $OB = \alpha$, $OC = \beta$ என இருக்கட்டும். எனவே $BC = \beta - \alpha$. BC-ன் நடுப்புள்ளி K_1 என்றால் K_1 ஐக் குறிக்கும் விகிதமுறு எண் $\alpha + \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)$. இதேபோன்று BK_1-ன் நடுப்புள்ளியான K_2 ஐக் குறிக்கும் விகிதமுறு எண் $\alpha + \left(\frac{\beta - \alpha}{2^2}\right)$. இதே போன்ற $\alpha + \left(\frac{\beta - \alpha}{2^3}\right)$, ... என்ற எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்களைக் குறிக்கும் விகிதமுறு புள்ளிகளை BC-க்கு இடையே காணலாம்.

மேற்கண்ட முடிவிலிருந்து ஒரு நேர் கோடு விகிதமுறு புள்ளிகளாலேயே முற்றுப் பெறுகின்றது என முடிவு செய்ய இயலாது. ஏனெனில் விகிதமுறு புள்ளிகள் எத்தனை நெருக்கமாக அமைந்திருப்பினும், அவற்றிற்கும் வேறான எண்ணற்ற புள்ளிகளும் நேர் கோட்டின் மீது அமையும். எடுத்துக்காட்டாக நாம் வரைந்துள்ள 'l' என்ற நேர்கோட்டில் $OA^2 = 2$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் A என்னும் புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். இந்தப் புள்ளி 'A', ஒரு விகிதமுறு புள்ளியாக இருக்க முடியாது. ஏனெனில் $x^2 = 2$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் விகிதமுறு எண் எதுவுமில்லை.

எனவே விகிதமுறு புள்ளிகள் மட்டும் ஒரு நேர் கோடு மீது பொருந்தினால் அந்த நேர் கோட்டில் எண்ணற்ற இடைவெளிகள் இருப்பதனால், ஒரு நேர் கோட்டைப் பூர்த்தி செய்ய விகிதமுறு எண்கள் மட்டும் போதாது.

ஒரு நேர் கோட்டில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி Q-க்கு, வலப் புறமாக அமைந்துள்ள புள்ளிகள் வகுப்பு B-லும், இடப் புறமாக அமைந்துள்ள புள்ளிகள் வகுப்பு A-லும் அமைந்தால் Q என்ற புள்ளி நேர் கோட்டின்மீது உள்ள புள்ளிகளை இரண்டு

வகுப்புகளாகப் பிரிக்கிறது. இந்தப் புள்ளி Q ஐயே நாம் ஒரு மெய் யெண் (L, U) என்று குறிப்பிடுகிறோம். எனவே ஒவ்வொரு மெய் யெண்ணுக்கும் ஒத்த ஒரு புள்ளி ஒரு நேர்கோட்டில் அமையும்.

மறுதலையாக ஒரு நேர் கோட்டில் அமைந்த ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஒத்த ஒரு மெய்யெண் உண்டு. இவ்வாறு ஒரு நேர் கோட்டின் மீதமைந்த புள்ளிகளுக்கும், மெய்யெண்களுக்கும் இடையே ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பு அமைந்துள்ளது. எல்லா மெய்யெண்களையும் கொண்ட தொகுதி எண்ணியல் தொடரகம் (Arithmetic continum) எனவும், ஒரு நேர் கோட்டின் மீதுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளையும் கொண்ட தொகுதி கோட்டுத் தொடரகம் (Linear conti num) எனவும் கூறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\alpha > \beta$ எனில் $(\alpha - \beta)$ கூட்டு மதிப்புடையது.

$\alpha < \beta$ எனில் $(\alpha - \beta)$ குறை மதிப்புடையது என நிறுவுக.

தெரிப்பு :

$\alpha > \beta$.

$\alpha + (-\beta) > \beta + (-\beta)$.

$\therefore \quad \alpha + (-\beta) > \bar{0}$

$\therefore \quad \alpha - \beta > \bar{0}$

$\therefore \quad (\alpha - \beta)$ கூட்டு மதிப்புடையது.

$\alpha < \beta$ எனில் மேலே கூறியதுபோல் $(\beta - \alpha)$ கூட்டு மதிப்புடையது. எனவே $(\alpha - \beta)$ குறை மதிப்புடையது.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\alpha = \beta,\ \beta > \gamma$ என்றால் $\alpha > \gamma$ என்று காட்டுக.

தெரிப்பு :

$\alpha = (L_1,\ U_1) \quad \beta = (L_2,\ U_2) \quad \gamma = (L_3,\ U_3)$ எனக் கொள்வோம்.

$\alpha = \beta$, எனில் L_1, L_2 என்ற இரண்டும் சர்வ சமம். மேலும் $\beta > \gamma$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே L_3 ஆனது L_2-ன் சரியான பகுதியாகும் (Proper part).

$\therefore L_3$, L_1-ன் சரியான பகுதி,

$\therefore \alpha > \gamma$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

எல்லாக் கூட்டு மெய்யெண்களும் குறை மெய்யெண்களை விடப் பெரியவை என நிறுவுக.

தெரிப்பு :

$\alpha \equiv (L_1, U_1)$; $\overline{0} \equiv (L_2, U_2)$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், பூச்சியம் U_2 ன் மீச்சிறு உறுப்பாகும். எனவே L_2-ல் உள்ள உறுப்புகள் குறை மெய்யெண்களாகும். எனவே L_2, L_1-ன் சரியான பகுதியாகும்.

$\therefore \quad \alpha > \overline{0}$

$\therefore \quad \alpha > L_2$ ல் உள்ள உறுப்பு (ஒரு குறை மெய்யெண்).

$\therefore$ கூட்டு மெய்யெண் $>$ குறை மெய்யெண்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$\alpha > \beta$ ஆனல் $-\alpha < -\beta$ ஆகும்.

$\alpha > \beta$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$\therefore \quad \alpha + (-\alpha) > \beta + (-\alpha)$.

$\overline{0} > \beta + (-\alpha)$

$(-\beta) + \overline{0} > [(-\beta) + \beta] + (-\alpha)$

$(-\beta) + \overline{0} > \overline{0} + (-\alpha)$

$\therefore \quad (-\beta) > (-\alpha)$

எடுத்துக் காட்டு 5 :

(i) $\frac{2}{3}$, (ii) $\frac{355}{113}$ என்ற விகிதமுறு எண்களின் தோராய மதிப்பைக் காண்க.

$$\frac{2}{3} = \left(\frac{20}{3}\right)\frac{1}{10}$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{1}{10}\left(6 + \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{1}{10^2} \times \left(\frac{20}{3}\right)$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{1}{10^2}\left(6 + \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{1}{10^3}\left(\frac{20}{3}\right)$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{1}{10^3}\left(6 + \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{1}{10^2} \times \frac{2}{3}.$$

$\therefore \quad 0{\cdot}6666 < \frac{2}{3} < 0{\cdot}6667$ ஆகும்.

(ii) $\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113}$

$$= 3 + \frac{1}{10}\left(\frac{160}{113}\right)$$

$$= 3 + \frac{1}{10}\left(1 + \frac{43}{113}\right)$$

$$= 3 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{43}{113}$$

$$= 3 + \frac{1}{10} + \frac{1\text{ம்}}{10^2}\left(\frac{430}{113}\right)$$

$$= 3 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\left(2 + \frac{104}{113}\right)$$

$$= 3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{104}{113}$$

$$= 3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{1}{10^3}\left(\frac{1040}{113}\right)$$

$$= 3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{1}{10^3}\left(9 + \frac{23}{113}\right)$$

$$= 3 + \frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{1}{10^3} + \frac{23}{113}$$

$$= 3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{1}{10^4}\left(\frac{230}{113}\right)$$

$$= 3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{1}{10^4}\left(2 + \frac{4}{113}\right)$$

$$= 3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{2}{10^4}$$
$$\frac{1}{10^4} \cdot \frac{4}{113}$$

$\therefore$ $\frac{355}{113}$ என்ற விகிதமுறு எண் 3.1292 - க்கும், 3.1293 க்கும் இடையே அமைந்துள்ளது,

அதாவது $3{\cdot}1292 < \frac{355}{113} < 3{\cdot}1293$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

(i) 2, (ii) 3-ன் வர்க்க மூலம் ஒரு விகிதமுறு எண் இல்லை என நிறுவுக.

(i) $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறு எண் என்று எடுத்துக் கொள்வோம். அதை $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ என்று கொண்டால், p-க்கும் q-க்கும் பொதுக் காரணி இராது.

$$\therefore \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

$$p^2 = 2q^2$$

q ஒரு முழு எண். எனவே p^2-ம், $2q^2$-ம் முழு எண்களேயாகும். எனவே p^2-ம் ஒரு முழு எண். மேலும் p^2 ஆனது $2q^2$-க்கு சமமாகையால், p^2 ஐ 2 ஆல் வகுக்கலாம்.

அதாவது p^2-ல் '2' ஒரு காரணியாக உள்ளது.

$p = 2n$ என்று கொண்டால் (n ஒரு முழு எண்)

$p^2 = 2q^2$

$\therefore \quad 4n^2 = 2q^2$

$\therefore \quad q^2 = 2n^2$.

எனவே, q ஐயும் 2 ஆல் வகுக்கலாம்.

எனவே p-க்கும், q-க்கும் 2 பொதுக் காரணியாக உள்ளது. இது நாம் எடுத்துக் கொண்ட கொள்கைக்கு முரண்பாடாக உள்ளது. அதாவது நாம் $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ஒரு விகிதமுறு எண் என்று எழுதலாம்.

எனவே $\sqrt{2}$ ஒரு விதமுறு எண்ணுக இருக்க முடியாது.

(ii) 3-ன் வர்க்க மூலம் ஒரு விகிதமுறு எண் இல்லை என நிறுவுக.

$\sqrt{3}$ விகிதமுறு எண் என எடுத்துக் கொள்வோம். $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், p-க்கும் q-க்கும் பொதுக் காரணி இராது.

$$3 = \frac{p^2}{q^2} \qquad \therefore \quad p^2 = 3q^2.$$

q ஒரு முழு எண். எனவே q^2,-ம், $3q^2$-ம் முழு எண்களாகும்.

$\therefore \quad p^2 =$ ஒரு முழு எண். மேலும் p^2, 3 ஆல் மீதியின்றி வகுபடும். எனவே p, q என்ற இரண்டும் 3 ஆல் மீதியின்றி வகுபடும். எனவே p, 3 ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்.

$\therefore \quad p = 3n$

$\therefore \quad (3n)^2 = p^2 = 3q^2$

$\therefore \quad q^2 = 3n^2$.

$\therefore$ q-ம் 3 ஆல் மீதியின்றி வகுபடும். எனவே p, q என்ற இரண்டும் 3 ஆல் மீதியின்றி வகுபடும். இது நாம் எடுத்துக் கொண்ட கொள்கைக்கு முரண்பாடாயுள்ளது. எனவே $\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறு எண் இல்லை.

பயிற்சி 1

I. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களை விகிதமுறு எண்கள் எனக் காட்டு.

(i) 5 (ii) -5 (iii) $2{\cdot}71$ என நிரூபி.

II. கீழே கொடுக்கப்பட்ட எண்கள் விகிதமுறு எண்கள் என்று காட்டு.

$\sqrt{3}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{81}$.

III. $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ என்ற எண் விகிதமுறு எண்ணாக இருக்க முடியாது என நிரூபி.

IV. இரண்டு கூட்டு மெய்யெண்களின் கூட்டுத் தொகை கூட்டு மெய் எண் என்று நிரூபி.

V. p ஒரு விகிதமுறு எண், q ஒரு விகிதமுரு எண் என்றால், (i) $p+q$ ஒரு விகிதமுரு எண் (ii) $p \cdot q$ ஒரு விகிதமுறு எண் $(p \neq 0)$ என்று காண்,

IV. $\alpha_1 \equiv (L_1\ U_1)$; $\alpha_2 \equiv (L_2\ U_2)$ எனில், L_1-லும், U_2-லும் சில உறுப்புகள் பொதுவாக இருக்குமாகில் $\alpha_1 > \alpha_2$ என நிறுவுக.

VII. நிறுவுக: (i) $-(\alpha+\beta) = -\alpha-\beta$.

(ii) $-(\alpha-\beta) = \beta-\alpha$.

(iii) $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$ எனில் $\alpha+\gamma > \beta+\delta$.

2. கந்தழித் தொடர் முறைகள்—எல்லைகள்

(Infinite Sequences and Limits)

2·1. நமக்கு நுண்கணிதத்திலிருந்து எல்லையைப் பற்றி ஓரளவு பொதுவாகத் தெரியும். இவ் வத்தியாயத்தில் "எல்லை" என்றால் என்ன என்பதைப் பற்றியும், அதைப்பற்றிய சில கருத்துக்களை வரையறுத்தும், நுட்பமாக ஆராய்வோம்.

2·2. மட்டு (Modulus)

x என்ற எண் கூட்டு எண்ணாகிலும் சரி அல்லது குறை எண்ணாகிலும் சரி, அதன் குறியை எடுத்துக் கொள்ளாது எண் மதிப்பை மட்டும் எடுத்துக் கொள்வோமானால், அதுவே x-ன் மட்டு மதிப்பு என்கிறோம். இதையே 'மட்டு x' என்று படிக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக :

$$|5| = |-5| = 5.$$

(i) $x \geqslant y$ ஆனால் $|x-y| = x-y$

$$|7-5| = 7-5 = 2.$$

(ii) $x \leqslant y$ ஆனால் $|x-y| = y-x$

$$|6-8| = 8-6 = 2.$$

(iii) $|x+y| = |x| + |y|$

$$|4+3| = 7 = |-4-3|$$

x-ம் y-ம் ஒரு குறியைக் கொண்டன.

(iv) $|x+y| < |x| + |y|$

x-ம் y-ம் வெவ்வேறு குறியை உடையன.

(v) $|x+y+z+ \ldots| \leq |x| + |y| + |z| + \ldots$

(vi) $|x| < 2$ ஆனால் $-2 < x < 2$.

(vii) $|x| < \epsilon$ ஆனால் $-\epsilon < x < \epsilon$ இங்கு ϵ என்பது ஒரு கூட்டெண்.

$|x-a| < \epsilon$ ஆனால் $a-\epsilon < x < a+\epsilon$.

(viii) $|x| > H$ ஆனால் $x > H$ அல்லது $x < -H$. இங்கு H ஒரு கூட்டெண்.

2·3. எல்லை :

ϵ, M, N என்ற குறிகள் :

ϵ என்பது கொடுக்கப்பட்ட அல்லது நாம் எடுத்துக் கொள்ளும் மிகச் சிறிய கூட்டெண். எ. கா. : $\epsilon = \cdot 005, \cdot 00001 \ldots \ldots$

M என்பது கொடுக்கப்பட்ட அல்லது நாம் எடுத்துக் கொள்ளும் ஏதாவது ஒரு கூட்டு முழு எண்ணைக் குறிக்கும். எ. கா. $M = 500, 10000 \ldots$ அநேக இடங்களில் M-க்கும் ϵ-க்கும் தொடர்புண்டு.

N என்பது மிகப் பெரிய எண்ணைக் குறிக்கும்.

2·4. வரையறை :

ϵ கொடுக்கப்பட்ட மிக மிகச் சிறிய கூட்டெண்ணாக இருக்கட்டும். a திட்டமான எண் எனில் $|x-a|$ ஆனது ϵ ஐ விடக் குறைவாக இருக்கும்படி x-ன் மதிப்பு கிடைக்குமாயின், x ஆனது a என்ற எல்லையை நெருங்குகிறது என்று கூறுகிறோம். இதை நாம் $x \rightarrow a$ என்ற குறியீட்டில் குறிப்பிடுகிறோம்.

N என்பது கொடுக்கப்பட்ட மிக மிகப் பெரிய எண்ணாக இருப்பினும், x-க்கு N ஐவிட அதிகமான ஒரு மதிப்பு கிடைக்குமாயின், x கந்தழியை நெருங்குகிறது என்கிறோம்.

இதை $x \rightarrow \infty$ என்று குறிப்பிடலாம்.

$x \rightarrow +\infty$ ஆனால் $-x \rightarrow -\infty$ என்கிறோம்.

$\in > 0$ என்பது ஏதேனும் ஒரு சிறிய கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண் என்க. a, l என்பவை திட்டமான எண்கள் எனில், $0 < |n-a| \leqslant \eta$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக்கடங்கிய எல்லா x-க்கும், (i) $|f(x)-l| < \in$ என்று அமையுமாறு ஒரு η ஐக் காண முடியுமாகில் எல்லை $\lim_{x \to a} f(x) = l$ எனப்படும். (ii) N என்ற கொடுத்துள்ள மிகப் பெரிய எண் எதுவாயினும் $f(x) > N$ என்ற மையுமாறு ஒரு η ஐக் காண முடியுமாகில் எல்லை $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ என் போம்.

2·5. தேற்றம் 1 :

எல்லை $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ஆனால் எல்லை $\lim_{x \to a} k(f(x)) = kl$ ஆகும்.

இங்கு k ஒரு மாறிலியாகும்.

தெரிப்பு :

$\in$ கொடுக்கப்பட்ட மிகச் சிறிய கூட்டெண்ணாக இருக்கட்டும். $\frac{\in}{|k|}$-ம் ஒரு கூட்டெண்ணாகும்.

எல்லை வரையறைபடி, $\in$ என ஒரு மிகச் சிறிய எண் கொடுக்கப்பட்டால், $0 < |x-a| \leqslant \eta$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக் கடங்கி, x அமையுமாறு 'η' என்ற கூட்டெண்ணைக் காணலாம்.

$$|f(x)-l| - \frac{\in}{|k|}$$

$$\therefore \quad |k| \cdot |f(x)-l| - \in$$

அதாவது $|kf(x)-kl| - \in$

$$\therefore \lim_{x \to a} kf(x) = kl.$$

2·6. தேற்றம் 2 :

எல்லை $\lim_{x \to a} f_1(x) = l_1$, எல்லை $\lim_{x \to a} f_2(x) = l_2$ ஆனால்

எல்லை $\lim_{x \to a} [f_1(x) + f_2(x)] = l_1 + l_2$.

தெரிப்பு :

ϵ கொடுக்கப்பட்ட எவ்வளவு மிகச் சிறிய கூட்டெண்ணுகிலும், $\frac{\epsilon}{2}$-ம் ஒரு கூட்டெண்ணுகும்.

எல்லை வரையறைப்படி, ϵ என ஒரு மிகச் சிறிய எண் கொடுக்கப்பட்டால்,

$0 < |x-a| < \eta_1$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்கடங்கிய x-ன் மதிப்புகளுக்கு $|f_1(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2}$ எனும்படி η_1 ஐயும்,

$0 < |x-a| < \eta_2$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்கடங்கிய x-ன் மதிப்புகளுக்கு, $|f_2(x)-l_2| < \frac{\epsilon}{2}$ என்னும்படி η_2 ஐயும் காணலாம்.

$$|f_1(x) + f_2(x) - l_1 - l_2| = |[f_1(x)-l_1] + [f_2(x)-l_2]| \leqslant |f_1(x)-l_1| + |f_2(x)-l_2|$$

$\eta = (\eta_1, \eta_2$ - இவற்றில் சிறியது) எனக் கொண்டால் $0 < |x-a| \leqslant \eta$ என்ற கட்டுப்பாட்டிலமைந்த x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $|f_1(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2}$, $|f_2(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2}$ என அமையும்.

எனவே $|f_1(x) + f_2(x) - l_1 - l_2| = |(f_1(x) - l_1) + (f_2(x) - l_2)|$

$$\leqslant |f_1(x) - l_1)| + |(f_2(x) - l_2)|$$

$$\leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = 0.$$

$\therefore$ எல்லை $_{x \to a} [f_1(x) + f_2(x)] = l_1 + l_2$.

அதேபோல்,

எல்லை $_{x \to a} [f_1(x) - f_2(x)] = l_1 - l_2$ என நிறுவலாம்.

2·7. தேற்றம் 3 :

$\lim_{x \to a} f_1(x) = l_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = l_2$ ஆனால்

$\lim_{x \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = l_1 \cdot l_2$ ஆகும்.

தெரிப்பு :

ϵ என்பது கொடுக்கப்பட்ட மிகச் சிறிய கூட்டெண்ணாகின்

$$\frac{\epsilon}{2(1+|l_2|)}, \quad \frac{\epsilon}{2(1+|l_2|)},$$

என்பவைகளும் கூட்டெண்களேயாகும்.

$0 < |x-a| \leqslant \eta_1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அமைந்த எல்லா x-க்கும் $|f_1(x)-l_1| < \dfrac{\epsilon}{2(1+|l_1|)} = \epsilon_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (I)$

எனவும்,

$0 < |x-a| < \eta_2$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அமைந்த எல்லா x-க்கும் $|f_2(x)-l_2| < \dfrac{\epsilon}{2(1+|l_2|)} = \epsilon_2$

எனவும் அமையுமாறு η_1, η_2 என்ற கூட்டெண்களைக் காணலாம்.

எனவே $[f_1(x) \cdot f_2(x) - l_1 l_2] = [f_1(x)-l_1][f_2(x)-l_2] + l_1[f_2(x)-l_2] + l_2(f_1(x)-l_1]$

$$\therefore \quad |f_1(x) \cdot f_2(x) - l_1 l_2| \leqslant |f_1(x)-l_1| \cdot |f_2(x)-l_2| + |l_1| \, |f_2(x)-l_2| + |l^2| \, |f_1(x)-l_1| .$$
$$\leqslant \epsilon_1 \epsilon_2 + |l_1| \epsilon_2 + |l_2| \epsilon_1$$

η என்ற கூட்டெண் η_1, η_2 என்பவற்றுள் சிறியதைக் குறிக்குமாறு கொண்டால் $0 < |x-a| < \eta$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அமைந்த x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$|f_1(x)-l_1| < \epsilon_1$, $|f_2(x)-l_2| \leqslant \epsilon_2$ என அமையும்.

$$\therefore \quad |f_1(x) \cdot f_2(x) - l_1 l_2| \leqslant \epsilon_1 [\epsilon_2 + |l_2|] + \epsilon_2 |l_1|$$
$$< \epsilon_1(1+|l_2|) + \epsilon_2(1+|l_1|)$$

$$< \frac{\epsilon}{2(1+|l_2|)} \cdot (1+|l_2|) + \frac{\epsilon}{2(1+|l_1|)} \cdot (1+|l_1|)$$

$$< \epsilon.$$

$\therefore$ எல்லை $\underset{x \to a}{} [f_1(x) f_2(x)] = l_1 l_2.$

2·8. கிளைத்தேற்றம் 1 :

எல்லை $\underset{x \to a}{} f_1(x) = l_1$ எல்லை $\underset{x \to a}{} f_2(x) = l_2 \ldots \ldots$

... எல்லை $\underset{x \to a}{} f_n(x) = l_n$ ஆனால்,

எல்லை $\underset{x \to a}{} f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x) = l_1 l_2 \ldots l_n$ ஆகும்.

கிளைத்தேற்றம் 2 :

n ஒரு கூட்டு எண்ணுகில்,

$f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_n(x) = x$ என்ருல்

எல்லை $\underset{x \to a}{} f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x) =$ எல்லை $\underset{x \to a}{} x^n = a^n$ ஆகும்.

2·9. தேற்றம் 4 :

எல்லை $\underset{x \to a}{} f(x) = l$ ஆனால், எல்லை $\underset{x \to a}{} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l} \; (l \neq 0)$

தெரிப்பு :

$l > 0$ என்று கொள்வோம்.

$l - \epsilon = k > 0$ என்று கட்டுப்பாட்டில் ϵ என்ற கூட்டு எண் எடுத்துக் கொள்வோம்.

ϵ மிகச் சிறிய கூட்டெண்ணுகின், $0 < |x-a| \leqslant \eta_1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அமைந்த x-ன் மதிப்புகளுக்கு $|f(x) - l| < \epsilon$ எனும்படி ஒரு η_1 காணலாம்.

எல்லை $\underset{x \to a}{} f(x) = l.$

$$\therefore \quad f(x) > l - \epsilon = K > 0.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{K}.$$

ϵ என்ற கொடுக்கப்பட்ட கூட்டெண் மிக மிகச் சிறியதாக இருந்தால் $kl\epsilon$-ம் மிகச் சிறியது.

எனவே, η_2 என்ற கூட்டெண்ணை, $0 < |x-a| \leq \eta_2$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அமைந்த x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $|f(x)-l| - klt$ என அமையுமாறு காணலாம்.

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| = \left| \frac{l-f(x)}{f(x)\,l} \right|$$

$$= \frac{|f(x)-l|}{f(x)\,l}$$

$\eta = (\eta_1, \eta_2$ என்பவற்றுள் சிறியது) எனில், $0 < |x-a| \leq \eta$ என்னும்படி அமைந்த x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|f(x)-l|}{f(x)\,l} < \frac{kl\epsilon}{lk}\,\epsilon.$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$l < 0$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், $l = -m, \; m > 0$

தேற்றம் 1-ன் படி, $\lim_{x \to a} [-1 \, . \, f(x)] = -1 \, . \, l = m > 0.$

1-ன் மூலம், $\lim_{x \to a} \left[\frac{1}{-f(x)} \right] = \frac{1}{m}.$

$$\lim_{x \to a} (-1) \times \frac{1}{-f(x)} = \frac{-1}{m} = \frac{1}{l}.$$

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}.$$

2·10. தேற்றம் 5 :

$\lim_{x \to a} f_1(x) = l_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = l_2$ ஆனால்,

$$\underset{x \to a}{\text{எல்லை}} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{l_1}{l_2}, \quad (l_2 \neq 0).$$

தெரிப்பு :

$$\underset{x \to a}{\text{எல்லை}} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \underset{x \to a}{\text{எல்லை}} f_1(x) \times \underset{x \to a}{\text{எல்லை}} \frac{1}{f_2(x)}$$

$$= l_1 \times \frac{1}{l_2}$$

$$= \frac{l_1}{l_2}.$$

2·11. N கொடுக்கப்பட்ட மிகப் பெரிய கூட்டெண்ணுக இருக்கட்டும். $0 < | x-a | \leqslant \eta$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அடங்கிய எல்லா x-க்கும் $f(x) > N$ என்று அமையுமாறு ஒரு η ஐக் காண முடியுமெனில் x ஆனது a ஐ நெருங்கும்போது, $f(x)$ கந்தழியை நெருங்குகிறது என்கிறோம்.

இதையே நாம் $\underset{x \to a}{\text{எல்லை}} f(x) = \infty$ என்று குறியீட்டின் மூலம் குறிப்பிடுகிறோம்.

2·12. தொடர்ச்சியான சார்புகள் (Continuous functions)

வரையறை : ϵ என்ற மிகச் சிறிய கூட்டெண் கொடுக்கப் பட்டு $| x-a | \leqslant \eta$ என்னும்படியான x-ன் மதிப்புகளுக்கு,

$| f(x) - f(a) | < \epsilon$ என்று பொருந்தும்படி η என்ற கூட்டெண் கண்டுபிடிக்க முடியுமானுல், $f(x)$ ஆனது, $x = a$ என்ற புள்ளியில் x-ன் தொடர்ச்சியான சார்பு எனப்படும்.

$x = a$-ல் $f(x)$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பானுல்,

$$\underset{x \to a+0}{\text{எல்லை}} f(x) = f(a) = \underset{x \to a+0}{\text{எல்லை}} f(x) \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, $\underset{x \to a+0}{\text{எல்லை}} f(x)$ என்பது, x-ன் மதிப்பு a-க்கும் மேலே உள்ளப் மதிப்புகளைப் பெற்று, பின்பு a-ன் மதிப்பை நெருங்குமானுல் கிடைக்கும் எல்லையைக் குறிக்கும்.

இதையே நாம், $\underset{x \to a+0}{\text{எல்லை}} f(x) = f(a)$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

x-ன் மதிப்பானது a-க்குக் கீழே உள்ள மதிப்புகளைப் பெற்று பின்பு a-ன் மதிப்பை நெருங்குமானால் கிடைக்கும் எல்லையைக் குறிக்கும். இதை நாம் எல்லை $f(x) = f(a)$ என்று குறிப்பிடு கிறோம். $x \to a-0$

2·13. (a, b) என்ற இடைவெளியில் (Interval) தொடர்ச்சி யான சார்பு

(a, b) என்ற இடைவெளியிலுள்ள x-ன் ஒவ்வொரு மதிப் பிற்கும் $f(x)$ தொடர்ச்சியாக இருப்பின், $f(x)$ ஆனது (a, b) என்ற இடைவெளியில் x-ன் தொடர்ச்சியான சார்பு எனப்படும்.

2·14. தேற்றம் 6 :

எல்லை $\underset{x \to a}{} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$, n ஒரு விகிதமுறு எண். முதலாவதாக, n ஒரு கூட்டு முழு எண் என்று எடுத்துக்கொள் வோம்.

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots \dots + a^{n-1}$$

$$\therefore \text{ எல்லை}_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \text{எல்லை}_{x \to a}\, x^{n-1} + \text{எல்லை}_{x \to a}\, x^{n-2}a + \dots \dots + \text{எல்லை}_{x \to a}\, a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + \dots \dots + a^{n-1}$$

$$= na^{n-1}$$

இரண்டாவதாக n ஒரு குறை முழு எண்ணாக இருந்தால், அதாவது, $n = -m$, m ஒரு கூட்டு முழு எண் ஆனால்

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = \frac{x^{-m} - a^{-m}}{x-a} = \frac{a^m - x^m}{a^m x^m (x-a)}$$

$$= -\frac{x^m - a^m}{x-a} \cdot \frac{1}{x^m} \cdot \frac{1}{a^m}$$

$$\therefore \text{ எல்லை}_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = -\text{எல்லை}_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x-a} \cdot \text{எல்லை}_{x \to a} \frac{1}{x^m} \cdot \frac{1}{a^m}$$

$$= -m a^{m-1} \cdot \frac{1}{a^{2m}}$$

$$= -m\,a^{-m-1}$$

$$= n\,.\,a^{n-1}$$

மூன்ருவதாக $n = \dfrac{p}{q}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், q ஒரு கூட்டு முழு எண்; p கூட்டு அல்லது குறை முழு எண்ணுக இருக்கலாம்.

$x = y^q$, $a = b^q$ என்று ஈடு செய்தால்

$y = x^{1/q}$, $b = a^{1/q}$ எனக் கிடைக்கும்.

$x \to a$ ஆனுல் $x^{1/q} \to a^{1/q}$ அதாவது $y \to b$ ஆகும்.

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{(y^q)^{p/q} - (b^q)^{p/q}}{y^q - b^q}$$

$$= \frac{y^p - b^p}{y^q - b^q}$$

$$= \frac{(y^p - b^p)/(y - b)}{(y^q - b^q)/(y - b)}$$

$$\therefore \quad \underset{x \to a}{\text{எல்லை}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \underset{y \to b}{\text{எல்லை}} \frac{y^p - b^p}{y - b}$$

$$\times \underset{y \to b}{\text{எல்லை}} \frac{1}{y^q - b^q / y - b}$$

$$= p\,.\,b^{p-1} \times \frac{1}{q\,.\,b^{q-1}}$$

$$= \frac{p}{q}\,.\,b^{p-q}$$

$$= \frac{p}{q}\,.\,a^{(p-q)/q} = \frac{p}{q}\,a^{\frac{p}{q}-1}$$

$$= n\,a^{n-1}.$$

2·15. தொடர் முறை (Sequences)

ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விதிப்படி எண்களைத் தொடர்படுத்தி எழுதினுல் அத் தொடரை, தொடர் முறை என்று அழைக்கிருேம். $a_1\ a_2,\ a_3 \ldots \ldots a_n$ என்ற தொடர் முறையை

$\{a_n\}$ அல்லது (a_n) என்று சுருக்கமாக எழுதலாம். இங்கு a_n என்பது தொடர் முறையின் n ஆவது உறுப்பைக் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$1,\ 3,\ 5,\ 7\ \ldots\ \ldots\ (n+1)\ \ldots\ \ldots$$

$$2,\ 4,\ 8\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ 2^n\ \ldots\ \ldots$$

$$3,\ -3,\ 3,\ -3\ \ldots\ (-1)^{n-1}\cdot 3,\ \ldots$$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \frac{1}{n}\ \ldots\ \ldots$$

'முடிவிலா' அல்லது 'கந்தழி' என்று கூறுங்கால், ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் அடுத்து மற்றோர் உறுப்பு உண்டு என்பதே பொருளாகும்.

2·16. n கந்தழியை நெருங்கும்போது, a_n ஆனது l என்ற திட்டமான எல்லையை நெருங்குமாயின், (a_n) எனும் தொடர் முறை ஒரு குவித் தொடர் முறை (convergent sequence) அல்லது குவியும் தொடர் முறை எனப்படும்.

அதாவது கொடுக்கப்பட்டுள்ள $\in$ எனும் மிகச் சிறிய, ஒவ்வொரு கூட்டெண்ணுக்கும் தக்கவாறு $n \geqslant m$ என்ற மதிப்புகளுக்கு $l - \in < a_n < l + \in$ என்ற கட்டுப்பாடு பொருந்தும் வகையில் m என்ற கூட்டு முழு எண் காண முடியுமானால்,

(a_n) என்ற கந்தழித் தொடர்முறை l என்ற எல்லையை நெருங்குகிறது. அதாவது எல்லை $\underset{n \to \infty}{a_n} = l$ எனில் $\{a_n\}$, l என்ற எல்லையை நெருங்குகிறது.

எடுத்துக்காட்டு :

$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\ \ldots\ \ldots\ \frac{1}{n}$ என்ற தொடர் முறையை எடுத்துக் கொள்வோம். இது ஒரு குவித் தொடர்.

$a_n = \frac{1}{n}$. $\in$ கொடுக்கப்பட்டால், $n > m = \frac{1}{\in}$(முழு எண்) மதிப்பிற்கு $|a_n - 0| < \in$ எனவே $(a_n) \to 0$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ a_n = \underset{l \to \infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{1}{n} = 0.$$

2·17. (a_n) என்ற தொடர் முறை கந்தழி எல்லையை நெருங்கு மாயின் அது ஒரு விரி தொடர் முறை (Divergent Sequence) எனப் படும்.

அதாவது, எல்லை $(a_n) = \pm \infty$ ஆனுல் (a_n) என்ற தொடர் $n \to \infty$ முறை ஒரு விரி தொடர் முறையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

1, 4, 9, 16 … … n^2 … … என்ற தொடர்முறை ஒரு விரி தொடர் முறையாகும்.

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ (a_n) = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ n^2 = \infty.$$

2·18. (a_n) என்ற தொடர் முறை மேலே கூறப்பட்ட இரு தொடர் முறைகளில் எதுவுமாக இல்லாதிருக்குமானல், அத் தொடர் முறை அலை தொடர் முறை (Oscillating Sequence) எனப் படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$1, -1, 1, -1$ … இத்தொடர் முறை ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லையை நெருங்காமல் (-1)-க்கும் '1'-க்கும் இடைப்பட்டு அலைகிறது. ஏனெனில் இங்கு $a_n = +1$ அல்லது -1. எனவே $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ a_n = +1$ அல்லது -1. எனவே இத் தொடரை அலை தொடர் முறை என்கிறோம்.

2·19. $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant$ .. எனில் (a_n) என்ற தொடர் முறை ஓரியல்பான இறங்கும் தொடர் முறை (Monotonic decreasing sequence) எனப்படும்.

$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$ இத் தொடர் முறை கண்டிப்பான ஓரியல்பான இறங்கும் தொடர் முறை (Strictly monotonic decreasing sequence) எனப்படும்.

$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots$ என்ற தொடர் முறையை ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை (monotonic increasing sequence) எனப்படும்.

$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots \ldots$ என்ற தொடர்முறை கண்டிப்பான ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை (Strictly monotonic increasing sequance) எனப்படும்.

ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை, ஓரியல்பான இறங்கும் தொடர் முறை-இவை ஒவ்வொன்றும் ஓரியல்பானவை எனக் கூறப்படும்.

2·20. தொடர் முறைகளில் $L \leqslant a_n \leqslant M$ என்ற சமனின் மைக்கொப்ப, n-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், L, M என இரு எண்கள் காணமுடியுமானால் அத் தொடர் முறைக்கு L என்பது கீழ் வரம்பு (Lower bound) எனவும், M என்பது அதன்மேல் வரம்பு (Upper bound) எனவும் அழைக்கப்படும்.

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சில முடிவுகளைத் தெரிப்பின்றி ஏற்றுக் கொள்வோம்,

(1) ஓர் ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை மேல் வரம்பு உடையதாயின் அத் தொடர் குவி தொடர் முறையாகும்.

(2) ஓர் ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை மேல் வரம்பு இல்லாது $+\infty$ ஐ அணுகுமாகில் அத் தொடர் விரி தொடர் முறையாகும்.

(3) ஓர் ஓரியல்பான இறங்கும் தொடர் முறை கீழ் வரம்பு உடையதாக இருக்குமானால், அத் தொடர் குவி தொடர் முறையாகும்.

(4) ஓர் ஓரியல்பான இறங்கும் தொடர் முறை கீழ் வரம்பு இல்லாது $-\infty$ ஐ நெருங்குமாகில் அத் தொடர் விரி தொடர் முறை எனப்படும்.

(5) (a_n) என்ற தொடர் முறை l_1 என்ற எல்லைக்குக் குவிந்து, (b_n) என்ற தொடர் முறை l_2 என்ற எல்லைக்குக் குவித் தால்,

(i) (ka_n) என்ற தொடர் முறை kl_1-க்குக் குவியும் ;

(ii) $(a_n \pm b_n)$ என்ற தொடர் முறை $l_1 \pm l_2$ என்ற எல்லைக்குக் குவியும் ;

(iii) $(a_n b_n)$ என்ற தொடர் முறை $l_1 l_2$ என்ற எல்லைக் குக் குவியும் ;

(iv) $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ என்ற தொடர் முறை $\left(\dfrac{l_1}{l_2}\right)$ என்ற எல்லைக் குக் குவியும். இங்கு $l_2 \neq 0$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

கவனிக்க :

ஒரு தொடர் முறை பூச்சியத்திற்குக் குவியுமானல் அத் தொடர் சூனியத் தொடர் முறை எனப்படும்.

2·21. $x > 1$ ஆனுல் (x^n) என்ற தொடர் முறை ஒரு விரி தொடர் முறையாகும். $|x| < 1$ ஆனுல் (x^n) என்ற தொடர் முறை ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும்.

தெரிப்பு : $x > 1$ என்று கொள்வோம். எனவே $x = 1 + \alpha$ α ஒரு கூட்டெண்.

$$x^n = (1+\alpha)^n > 1 + \alpha n.$$

$$\therefore \text{ எல்லை}_{n \to \infty} x^n > \text{எல்லை}_{n \to \infty} (1 + n\alpha) = \infty$$

$$\therefore \text{ எல்லை}_{n \to \infty} x^n = \infty.$$

$\therefore$ $x > 1$-க்கு, (x^n) என்பது ஒரு விரி தொடர் முறையாகும்.

(ii) $0 < x < 1$ என்ருல்,

$$x = \frac{1}{1+\alpha} \text{ ஆகும்.} \quad \alpha > 0.$$

$$\therefore \quad x^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} < \frac{1}{1+n\alpha}$$

$$\therefore \quad 0 < x^n < \frac{1}{1+n\alpha}$$

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} \frac{1}{1+n\alpha} = 0.$$

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{n \to \infty} x^n = 0.$$

$\therefore$ $0 < x < 1$ என்ற மதிப்பிற்கு (x^n) என்ற தொடர் முறை ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும்.

(iii) $-1 < x < 0$ என்று எடுத்துக் கொள்வோம்.

எனவே, $x = -y$ ஆனால் $0 < y < 1$ ஆகும்.

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ x^n = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ (-y)^n$$

$$= \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ (-1)^n \ \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ (y)^n$$

$$= \pm 1 \times 0$$

$$= 0.$$

$\therefore\ -1 < x < 0$-க்கு (x^n) என்ற தொடர்முறை ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும்.

குறிப்பு : $x = +1$ ஆனால் (x^n) என்ற குவி தொடர்முறை 1-க்குக் குவிகிறது.

$x \leqslant -1$ ஆனால் (x^n) என்ற தொடர் முறை, அலை தொடர் முறையாகும்.

2·22. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ஆனால் (a_n) ஒரு குவி தொடர் முறையாகும். இது ஒரு திட்டமான எல்லை e ஐப் பெற்றது.

தெரிப்பு :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

எனவே (a_n) ஓர் ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறையாகும்.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\underline{|2}}$$

$$+ \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}} + \ldots \ldots$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{\lfloor n}$$

$$\leqslant 1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{\lfloor n}$$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 1+2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$< 3.$$

மேலும் $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2}+\cdots\cdots$

$$\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{\lfloor n}$$

$$= 2+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2}+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{\lfloor n}$$

$\therefore\ a_n > 2.$

$\therefore\ 2 < a_n < 3.$

$\therefore$ (a_n) ஓர் ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை; கீழ் வரம்பும், மேல் வரம்பும் பெற்றுள்ளது. எனவே (a_n) ஒரு குவி தொடர் முறையாகும். அதன் எல்லை 'e' என்று குறிப்பிடப்படும்.

அதாவது,

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ a_n = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$

2·23. தேற்றம் 7 :

(a_n) என்ற கூட்டெண்களால் அமைந்த ஒரு தொடர் முறையில் n-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், $n \geqslant m$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $\frac{a_{n+1}}{a_n} > k > 1$ என்ற சமனின்மை பொருந்துமாயின் (a_n) ஒரு விரி தொடர் முறையாகும்.

தெரிப்பு :

$$n \geqslant m \text{ ஆனால் } \frac{a_{m+1}}{a_m} > k$$

$$\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} > k$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$\frac{a_{m+r}}{a_{m+r-1}} > k\ .$$

$$\therefore \quad \frac{a_{m+r}}{a_m} = \frac{a_{m+r}}{a_{m+r-1}} \cdot \frac{a_{m+r-1}}{a_{m+r-2}} \dots \frac{a_{m+1}}{a_m} > k^r$$

$$\therefore \quad a_{m+r} > k^r a^m$$

$\therefore$ $\lim\limits_{r \to \infty}$ எல்லை $k^r a^m = \infty$, ஏனெனில் $k > 1$, a_m ஒரு திட்டமான எண்.

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{n \to \infty}\ a_n = \text{எல்லை}_{r \to \infty}\ a_{m+r} = \infty .$$

$\therefore$ (a_n) என்ற தொடர் முறை விரியும்.

2·24. தேற்றம் 8 :

n-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், $n \geqslant m$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| < k < 1$ என்ற சமனின்மை பொருந்துமாயின் (a_n) ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும். k ஒரு மாறிலியாகும்,

தெரிப்பு :

$$\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| < k, \ \left|\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}}\right| < k, \ \dots \left|\frac{a_{m+r}}{a_{m+r-1}}\right| < k$$

$$\therefore \left|\frac{a_{m+r}}{a_m}\right| = \left|\frac{a_{m+r}}{a_{m+r-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{m+r-1}}{a_{m+r-2}}\right| \dots \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| < k^r$$

$$\therefore \; 0 < |a_{m+r}| < k^r \; |a_m| .$$

$\therefore$ எல்லை $\underset{r \to \infty}{} k^r \; |a_m| = 0$. ஏனெனில் $k < 1$, $|a_m|$ ஒரு திட்டமான எண்ணாகும்.

$\therefore \; |a_{m+r}| \longrightarrow 0$ எனவே $a_{m+r} \longrightarrow 0$.

$\therefore$ எல்லை $\underset{n \to \infty}{} a_n =$ எல்லை $\underset{r \to \infty}{} a_{m+r} = 0$.

$\therefore$ (a_n) ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும்.

2.25. தேற்றம் 9 :

(a_n) கூட்டெண்களால் அமைந்த ஒரு தொடர் முறையில் எல்லை $\underset{n \to \infty}{} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$ என்ற சமனின்மை பொருந்துமாயின் (a_n) ஒரு விரி தொடர் முறையாகும். (l ஒரு மாறிலி).

தெரிப்பு :

எல்லை $\underset{n \to \infty}{} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. ஆகையால் ϵ எவ்வளவு மிகச் சிறிய கூட்டெண்ணாகிலும் $n \geqslant m$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \epsilon$ என்ற சமனின்மை பொருந்தும் என்பதே எல்லை வரையறையாகும்.

ஆகவே $\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \epsilon$ ஆகும்.

ஏனெனில் $l > 1$. ஆதலால் $l - \epsilon > 1$ என அமையுமாறு ϵ-ஐ மிகச் சிறிய கூட்டெண் மதிப்புடையதாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$\therefore \; l - \epsilon = k$ என்போம். $k > 1$ ஆகிறது.

$\therefore \; \frac{a_{n+1}}{a_n} > k > 1 \quad \therefore$ தேற்றம் 7-ன்படி (a_n) என்ற தொடர் முறை விரியும்.

2·26. தேற்றம் 10 :

$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l < 1$ (l மாறிலி) ஆனால் (a_n) ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும்.

தெரிப்பு :

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l.$$

எனவே, $n \geqslant m$-க்கு $\in$ மிகச் சிறிய கூட்டெண்,

$$\therefore \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < l + \in.$$

$l < 1$ எனில் $l + \in < 1$ என்று அமையும் வகையில் $\in$-ஐ மிகச் சிறிய கூட்டெண் மதிப்புடையதாக எடுத்துக்கொள்ளலாம். $l + \in = k$ என்போம். $k < 1$ ஆகிறது,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < k < 1.$$

$\therefore$ 8 ஆம் தேற்றத்தின்படி (a_n) ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும்.

2·27. k ஒரு மெய்யெண்ணாக இருப்பின், (n^k) என்ற தொடர் முறை, $k > 0$-க்கு ஒரு விரி தொடர் முறையாகும். $k < 0$-க்கு அத்தொடர் முறை குவி தொடர் முறையாகும். இதை நாம் தெரிப்பின்றி ஏற்றுக் கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$|r| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $a_n = n \cdot r^n$ ஆனால் $\lim_{n \to \infty} (a_n) = 0$ என நிறுவுக. (செ.ப.க.)

$$a_n = n \cdot r^n.$$

$$\therefore a_{n+1} = (n+1)\, r^{n+1}$$

$$\therefore \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)\, r^{n+1}}{n \cdot r^n} \right| = \left| \frac{n+1}{n} \right| \; |r|$$

$$= \left| 1 + \frac{1}{n} \right| \; |r|$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| 1 + \frac{1}{n} \right| \; | r |$$

$$= | r | < 1.$$

$\therefore \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1.$ ஆகையால் தேற்றம் 10-ன் படி (a_n) ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும்.

எனவே, $\lim_{n \to \infty} (a_n) = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$(n^r x^n)$ என்ற தொடர் முறையின் தன்மையை அறிக.

$$a_n = n^r x^n \qquad a_{n+1} = (n+1)^r x^{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \left(\frac{n+1}{n} \right)^r \right| \; | x |$$

$$= | x |$$

(i) $| x | < 1$ ஆனால் $(n^r x^n)$ ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும்.

(ii) $x > 1$ ஆனால் $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x > 1.$

$\therefore$ $(n^r x^n)$ ஒரு விரி தொடர் முறையாகும் (தேற்றம் 7).

(iii) $x < -1$ ஆனால் $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = | x | > 1$

$\lim_{n \to \infty} | a_n | = \infty$ ஆனால் (a_n) என்ற தொடர் முறையில் ஒன்று விட்டு ஒன்று உறுப்புகள் கூட்டு, குறை எண்களாக இருப்பதால் (a_n) ஓர் அலை தொடர் முறையாகும்.

(iv) $x = 1$; $(n^r x^n) = (n^r)$ என்ற தொடர் முறை $r < 0$ ஆனால் குவியும், $r > 0$ ஆனால் விரியும்.

(vi) $x = -1$, $((-1)^n n^r)$ என்ற தொடர் முறை $r < 0$-க்குக் குவியும்; $r \geq 0$ ஆனால் அலையும்.

பயிற்சி 2

(1) பின்வரும் தொடர் முறைகளின் தன்மைகளை அறிக. மேல், கீழ் வரம்புகளிருப்பின் அவைகளையும், எல்லையிருப்பின் அவ்வெல்லைகளையும் அறிக.

1. $a_n = I\left(\frac{n}{5}\right)$ 2. $a_n = \frac{4^n}{\lfloor n}$

3. $a_n = n[1 + (-1)^n]$ 4. $a_n = 2 + (-1)^n$

5. $a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ 6. $a_n = n + \frac{(-1)^n}{n^2}$

7. $a_n = n^{1/n}$ 8. $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$.

(2) பின்வரும் தொடர் முறையின் தன்மைகளையும், குவி தொடராயிருப்பின் அதன் எல்லைகளையும் அறிக.

1. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ 2. $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

3. $a_n = \frac{n}{n+1}$ 4. $a_n = \frac{n^2}{n+1}$

5. $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}$

(3) $a_n = n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ஆனால் எல்லை $\underset{n \to \infty}{(a_n)} = 1$ என நிறுவுக.

(4) $a_n = \frac{\log n}{n}$ ஆனால் எல்லை $\underset{n \to \infty}{(a_n)} = 0$ என நிறுவுக.

(5) $a_n = \frac{x^n}{\lfloor n}$ ஆனால் எல்லை $\underset{n \to \infty}{(a_n)} = 0$ என நிறுவுக.

(6) $n \to \infty$ ஆனால், (i) $[\sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3-n}]$ (ii) $\frac{n}{2^n}$ என்பவற்றின் எல்லைகளைக் காண்க.

(7) $a_n = \frac{1}{n^2}$ ஆனால் எல்லை $\underset{n \to \infty}{(a_n)} = 0$ என நிறுவுக.

(8) $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$

என்ற தொடர் முறையின் தன்மையை அறிக.

(9) எல்லை காண்க : $\underset{x \to a}{\text{எல்லை}} \frac{x^{4/3}-a^{4/3}}{x-a}$

(10) $\text{எல்லை} \frac{(x+y)^a-(x-y)^b}{(x+y)^b-(x-y)^b}$

3. a. கந்தழி தொடர்கள்— குவிதல், விரிதல்

(Infinite Series—Convergency & Divergency)

$u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots + u_n + \dots$ என்பதை நாம் ஒரு தொடர் என்று அழைக்கிறோம்.

தொடர்கள் இரண்டு வகைப்படும். (1) முடிவுள்ள தொடர் (2) முடிவில்லாத் தொடர் அல்லது கந்தழித் தொடர் என இரண்டு வகைகள் உண்டு.

3·1. முடிவுள்ள தொடர் :

ஒரு தொடரில் உள்ள உறுப்புகள், குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கை வரை இருக்குமானல் அதுவே முடிவுள்ள தொடர் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக் காட்டாக $1+3+5+\dots+(2n-1)$ என்பது n உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு முடிவுள்ள தொடராகும்.

3·2. முடிவில்லா அல்லது கந்தழித் தொடர் :

ஒரு தொடரில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை கந்தழி வரைச் செல்லுமானல் அத்தொடர் கந்தழித் தொடர் அல்லது முடிவில்லாத் தொடர் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு :

$1 + x + x^2 + \dots\dots + x^{n-1} + \dots$ கந்தழி வரை - இப் பெருக்குத் தொடரின் உறுப்புகள் முடிவில்லாதவை.

ஒரு தொடரை $u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots + u_n + \dots$ கந்தழி வரை என்று எழுதுவதற்குப் பதிலாக $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ என்று சுருக்கமாக

எழுதலாம். அதன் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையை S_n என்று குறிப்பிடலாம்.

$$S_1 = u_1$$
$$S_2 = u_1 + u_2$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n.$$

ஒரு முடிவுள்ள தொடரின் கூட்டுத் தொகை ஒரு திட்டவட்டமான எண்ணுகும். அதே போல் ஒரு கந்தழித் தொடரின் கூட்டுத் தொகை திட்டமான எண்ணுகவோ, $-\infty$ அல்லது $+\infty$ ஆகவோ, திட்டமான எண்ணுக இல்லாமலோ, இருக்கலாம் நாம் இப்பகுதியில் கந்தழித் தொடரின் கூட்டுத் தொகையைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

3·3. குவி தொடர் (Convergent Series)

n கந்தழியை எல்லையாக அடையும்போது, (S_n) என்ற தொடர் முறை ஒரு திட்டமான எண்ணை அடையுமானுல் அக் கந்தழித் தொடர் ஒரு குவி தொடராகும் (Convrgent series).

இதை எல்லை $\lim_{n\to\infty} S_n = S =$ திட்டமான எண் என்று எழுதலாம்.

எனவே, S என்பது ஒரு தொடரை கூட்டிப் பெறும் தொகையல்ல என்பதை நாம் மனதில் கொள்ள வேண்டும். S என்பது அத் தொடரின் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையின் எல்லை ஆகும்.

3·4. விரி தொடர் (Diveregent Series) :

(S_n) என்ற தொடர் முறையில் n கந்தழியை அடையும்போது S_n விரிந்து $-\infty$ அல்லது $+\infty$ ஐ அடையுமானுல் அக்கந்தழித் தொடர் ஒரு விரி தொடர் எனப்படும் இதையே,

எல்லை $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ அல்லது $+\infty$

என்று இருக்குமானுல் அத்தொடர் விரி தொடர் என்கிறோம்.

3.5 அலை தொடர் (Oscillating Series):

n எவ்வளவு பெரிதாக இருப்பினும், (S_n) என்ற தொடர் முறை குறிப்பிட்ட எண்களுக்கு இடைப்பட்டோ அல்லது $\pm\infty$ க்கு இடைப்பட்டோ அலையுமாகில், அதுவே ஒரு அலை தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ என்ற தொடர் முறையில் $S_n = 1$ அல்லது 0 (n ஒற்றைப்படை அல்லது இரட்டைப்படை எண்) $\therefore$ (S_n) என்ற தொடர்முறை 1-க்கும் 0-க்கும் இடைப்பட்டு அலைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{n-1} + \ldots\ \infty$ என்ற கந்தழித் தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம். இத்தொடர் ஒரு பெருக்குத் தொடராகும். இதன் பொது விகிதம் x ஆகும்.

$S_n = 1 + x + x^2 + \ldots\ \ldots + x^{n-1}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$S_n = \frac{1-x^n}{1-x};\ x < 1 \text{ ஆக இருக்கும்போது,}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

(i) $|x| < 1$ எனில் $x^n \to 0$

எனவே, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-x}$

(ii) $x > 1$ எனில், $x^n \to \infty$ எனவே, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

விளக்கம்:

(i) $x = \frac{1}{2} < 1$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$S_n = \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

n எவ்வளவு பெரிதாக இருப்பினும்,

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$$

$$\therefore\ 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] < 2.$$

$$\therefore\ S_n < 2.$$

n ஆனது எல்லையற்று வளர்ந்து செல்லும்போது அத் தொடரின் கூட்டுத் தொகை 2 எனும் எல்லையை நெருங்குகிறது.

எனவே,

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ S_n = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$= 2 = \text{திட்டமான எண்.}$$

ஆகையால் அத்தொடர் $x < 1$ என்ற மதிப்பிற்குக் குவிகிறது. எனவே, அத்தொடர் குவி தொடராகும்.

(ii) $x > 1$ அதாவது $x = 2 > 1$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$S_n = \frac{x^n - 1}{x-1}$$

$$= \frac{x^n}{x-1} - \frac{1}{x-1}$$

$x = 2$

$$S_n = \frac{2^n}{2-1} - \frac{1}{2-1}$$

$$= 2^n - 1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

x-ன் மதிப்பு அதிகரிக்க அதிகரிக்க S_n-ன் மதிப்பு எந்த ஒரு திட்டமான எண்ணையும்விட அதிகமாகிறது. (1)-ல் n-க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளைக் கொடுத்தால்,

$n = 4$ என்றால்,

$$S_n = 15$$

$n = 5$ என்றால்,

$$S_n = 32$$

... ...

... ...

ஆகையால் விரி தொடரின் வரையரைப்படி, n அதிகரிக்க அத் தொடரின் மதிப்பு விரிந்து $-\infty$ அல்லது $+\infty$ ஐ அடைகிறது. எனவே $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$ கந்தழி வரை, தொடர், $x > 1$ ஆனுல், ஒரு விரி தொடராகும்.

(iii) $x = 1$ என்று எடுத்துக் கொள்வோமானுல்

$$S_n = 1 + 1 + \dots + 1 \ (n \text{ தடவை}) = n$$

$$\therefore \ \text{எல்லை}_{n \to \infty} S_n = \text{எல்லை}_{n \to \infty} n = \infty$$

எனவே $x = 1$ என்ற மதிப்பிற்கு அத்தொடர் ஒரு விரித் தொடராகும்.

(iv) $x = -1$ என்ருல்

$$S_n = (1-1) + (1-1) + (1-1) \dots + (1-1) + 1$$

n ஓர் ஒற்றைப்படை எண்.

$$\therefore \ \text{எல்லை}_{n \to \infty} S_n = 1$$

n ஒரு இரட்டைப்படை எண்ணுனுல்

$$S_n = (1-1) + (1-1) + (1-1) \dots + (1-1) = 0$$

$$\therefore \ \text{எல்லை}_{n \to \infty} S_n = 0.$$

ஆகையால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெருக்குத் தொடரில் பொது விகிதம் $x = 1$ என்ருல் அத்தொடர் 0-க்கும் 1-க்கும் இடைப் பட்டு அலைகிறது.

(v) $x < -1$ என எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} S_n = -\infty \ (n \text{ இரட்டைப்படை எண்ணுனுல்})$$
$$= +\infty \ (n \text{ ஒற்றைப் படை எண்ணுனுல்})$$

விளக்கம்

$$x = -3 < -1$$

$$\therefore \ S_n = \frac{1-(-3)^n}{1-(-3)}$$

n ஓர் ஒற்றைப்படை முழு எண்ணுயின்,

$$S_n = \frac{1+3^n}{1+3}$$

$$\therefore \quad S_n > \frac{2+2n}{4} \quad [\because \; 3^n = (1+2)^n = 1+n.2 + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot 2^2 + \dots + 2^n > 2n]$$

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{n\to\infty} \; S_n = +\infty$$

n ஓர் இரட்டைப்படை முழு எண்ணுக இருக்குமானுல்,

$$S_n = \frac{1-(-3)^n}{1-(-3)}$$

$$= \frac{1-3^n}{1+3}$$

$$\therefore \quad S_n < -\frac{2n}{4} \quad [\because \; 3^n > 2n \qquad \therefore \; -3^n < -2n]$$

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{n\to\infty} \; S_n = -\infty.$$

ஆகையால் (S_n) தொடர் முறையில் $x < -1$ என இருக்கு மாகில் அத்தொடர் $-\infty$-க்கும், $+\infty$-க்கும் இடைப்பட்டு அலை கிறது.

இதைப் பின்வருமாறு தொகுத்து எழுதலாம் :

$1+x+x^2+ \dots + x^{n-1} + \dots$ கந்தழி வரை என்ற பெருக்குத் தொடரில்,

(i) $x < 1$ ஆனுல் அத் தொடர் குவி தொடராகும்.

(ii) $x \geqslant 1$ ஆனுல் அத் தொடர் விரி தொடராகும்.

(iii) $x \leqslant -1$ ஆனுல் அத் தொடர் இடைப்பட்டு அலையும்.

3·6. தேற்றம் 1 :

$\sum_{1}^{\infty} U_n$ என்ற தொடர் U என்ற கூட்டுத் தொகைக்கும், $\sum_{1}^{\infty} V_n$ என்ற தொடர் V என்ற கூட்டுத்தொகைக்கும் குவியுமானுல்

(i) $\sum_{1}^{\infty} (u_n + v_n)$ என்ற தொடர் $U + V$ என்ற கூட்டுத் தொகைக்குக் குவியும்.

(ii) $\sum_{1}^{\infty} (u_n - v_n)$ என்ற தொடர் $U - V$ என்ற கூட்டுத் தொகைக்குக் குவியும்.

(iii) $ku_1 + ku_2 + \dots \infty = k \sum_{1}^{\infty} u_n$ என்ற தொடர் kU என்ற கூட்டுத் தொகைக்குக் குவியும்.

(iv) $\sum_{1}^{\infty} \sqrt{u_n v_n}$ என்ற தொடர் ஒரு குவி தொடராகும்.

தெரிப்பு :

(i) $\sum_{1}^{n} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = U_n$

$\sum_{1}^{n} v_n = v_1 + v_2 + v_3 \dots v_n = V_n$ என்றால்

எல்லை $\underset{n \to \infty}{} U_n = U$

எல்லை $\underset{n \to \infty}{} V_n = V$ ஆகும்.

$$S_n = \sum_{1}^{n} (u_n + v_n) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n)$$

$$\therefore S_n = (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n) + (v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{n} u_n + \sum_{n=1}^{n} v_n$$

$$= U_n + V_n$$

$$\therefore \text{ எல்லை}_{n \to \infty} S_n = \text{எல்லை}_{n \to \infty} U_n + \text{எல்லை}_{n \to \infty} V_n$$

$$S = U + V$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{n} (u_n - v_n) = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + (u_3 - v_3) + \dots + (u_n - v_n),$$

$$= [u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n] - [v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n]$$

$$= U_n - V_n$$

$$\therefore \quad S_n = U_n - V_n$$

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} S_n = \text{எல்லை}_{n \to \infty} U_n - \text{எல்லை}_{n \to \infty} V_n$$

$$S = U - V$$

(iii) $$\sum_{1}^{n} k\, u_n = ku_1 + ku_2 + ku_3 + \dots + ku_n$$

$$= k\,[u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n]$$

$$= k\, U_n$$

$$S_n = k\, U_n$$

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} S_n = k \text{ எல்லை}_{n \to \infty} U_n$$

$$S = k\, U$$

(iv) $$\sum_{1}^{n} \sqrt{u_n v_n} = \sqrt{u_1 v_1} + \sqrt{u_2 v_2} + \dots + \sqrt{u_n v_n}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} (u_n + v_n)$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} u_n + \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} v_n$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \sum_{1}^{n} \sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} U_n + \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} V_n$$

$$\leqslant \frac{1}{2} U + \frac{1}{2} V$$

$\Sigma \sqrt{u_n v_n}$ என்ற தொடர் ஒரு குவி தொடராகும்.

3.7. தேற்றம் 2 :

ஒரு தொடரிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளை நீக்குவதனுல் அல்லது சேர்ப்பதனுல் அத் தொடரின் குவிதல், விரிதல் அல்லது அலைதல் தன்மை மாறுவதில்லை.

தெரிப்பு :

$$\sum_{1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$ கந்தழி வரை என்ற தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம்.

அத் தொடரின் p உறுப்புகளை நீக்கவும். அதாவது,

$S_p = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_p$ உறுப்புகளை,

$S_{n+p} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_p + \dots + u_{n+p}$-லிருந்து நீக்கினுல்,

$$S_{n+p} - S_p = [u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_p + \dots + u_{n+p}] - [u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_p]$$

$$\therefore \quad S_{n+p} - S_p = u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n+p}$$

இதை t_n என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$t_n = S_{n+p} - S_p$ ஆகும்.

S_p என்பது $\sum_{1}^{p} u_p$ என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையாகும். அது ஒரு திட்டமான எண்ணுகும்.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ என்ற தொடர் S என்ற கூட்டுத் தொகைக்குக் குவியுமேயானல்

$$\lim_{n \to \infty} t_n = \lim_{n \to \infty} (S_{n+p} - S_p)$$
$$= S - S_p$$
$$= \text{ஒரு திட்டமான எண்.}$$

(t_n) என்ற தொடர் ஒரு குவி தொடராகும்.

அதேபோல் (S_n) என்ற தொடர் விரிந்தாலோ அல்லது அலைந்தாலோ, (t_n)-ம் (S_n)ஐப் போலவே விரியும் அல்லது அலையும்.

ஆகையால் ஒரு தொடரின் ஆரம்பத்தில் குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளை நீக்குவதால் அதன் தன்மை மாறுவதில்லை.

3.8 எச்சம் (Remainder)

$a_1+a_2+a_3+\dots\dots a_n+\dots$ என்ற கந்தழித் தொடரில் முதல் $(n+m)$ உறுப்புகளை எடுத்துக்கொண்டால்,

$$S_{n+m} = a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots+a_{n+m}$$
$$S_n = a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$$

$$\therefore \quad S_{n+m} - S_n = (a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+a_{n+1}+\dots+a_{n+m}) - (a_1+a_2+a_3+\dots+a_n)$$
$$= a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}\dots+a_{n+m}$$
$$= {}_mR_n \text{ என்று குறிப்பிடப்படுகிறது.}$$

இதுவே பகுதி எச்சம் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

$m = 1$ ஆனல்.

$$S_{n+1} - S_n = (a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+a_{n+1}) - (a_1+a_2+a_3+\dots+a_n)$$
$$= a_{n+1}$$
$$\therefore \quad {}^1R_n = a_{n+1}$$

3.9 தேற்றம் 3 :

$$\sum_{1}^{\infty} u_n \text{ என்ற குவி தொடரில்,}$$

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} \; {}^mR_n = 0.$$

தெரிப்பு :

$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ கந்தழி வரை என்ற குவி தொடரில் S என்பது ஒரு திட்டமான எண்ணுகும். ஏதாவதாரு சிறிய எண் $\in$ கொடுக்கப்பட்டால் $n \geqslant N$ என்ற மதிப்புக்கு $| S_n - S | < \frac{\in}{2}$ எனப் பொருந்தும்.

$n + m \geqslant N$ என்பதால்

$$| S_{n+m} - S | < \frac{\in}{2}$$

$$\begin{aligned} | {}^mR_n | &= | S_{m+n} - S_n | \\ &= | S_{m+n} - S + S - S_n | \\ &\leqslant | S_{m+n} - S | + | S - S_n | \\ &\leqslant \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} \end{aligned}$$

$\therefore \; {}^mR_n \leqslant \in$

$\therefore \; \text{எல்லை}_{n \to \infty} \; {}^mR_n = 0.$

$m = 1$ என்ருல் $\text{எல்லை}_{n \to \infty} \; {}^1R_n = 0.$

$\therefore \; \text{எல்லை}_{n \to \infty} \; u_{n+1} = 0.$

$\therefore \; \text{எல்லை}_{n \to \infty} \; u_n = 0.$

ஆகையால் ஒரு கந்தழித் தொடர் குவியுமானல் அதன் n ஆவது உறுப்பு, n கந்தழி எல்லையை அடையும்போது, 0 எல்லையை அணுகும்.

குறிப்பு :

n-ன் எல்லாக் கூட்டு முழு எண் மதிப்புகளுக்கும் $\sum_{1}^{\infty} u_n$ என்ற தொடர் குவியுமானுல், எல்லை $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவையான, போதுமான கட்டுப்பாடாகும். தேவையானது என்பது தேற்றத்தில் நிரூபிக்கப்பட்டது. போதுமான கட்டுப்பாடு என்பது இப்பாடத்திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டது.

எல்லை $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவையானது. அதாவது ஒரு தொடர், குவி தொடரானுல் எல்லை $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ என்பது தேவை. எல்லை $\lim_{n \to \infty} u_n \neq 0$ என்ருல் அத் தொடர் குவியவில்லை என்று நிர்ணயிக்கலாம்.

ஆனுல் மறுதலையாக எல்லை $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ என்ருல் அத் தொடர் குவியலாம் அல்லது குவியாமல் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ கந்தழி வரை என்ற தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம்

$$n \text{ ஆவது உறுப்பு} = \frac{1}{n}.$$

$$u_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

எனவே நாம் அத் தொடர் குவிகிறது என்று சொல்லிவிட முடியாது. ஏனெனில் அத்தொடர் ஒரு விரி தொடர் ஆகும்.

$$\sum_{1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \infty$$

$$nR_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

$$nR_n > \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

$$= n \cdot \frac{1}{n+n}$$

$$= n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ எல்லை $\lim_{n \to \infty} nR_n \neq 0$.

ஆகையால் எல்லை $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ என்றாலும், எல்லை $\lim_{n \to \infty} nR_n \neq 0$ ஆன படியால் அத்தொடர் குவி தொடராகவில்லை.

எனவே, ஒரு தொடர் குவி தொடராக எல்லை $\lim_{n \to \infty} {}_mR_n = 0$ என்பது ஒரு தேவையான, போதுமான கட்டுப்பாடு, எல்லை $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ என்பது தேவையான மட்டும் கட்டுப்பாடாகும்.

ஒவ்வொரு n க்கும் $u_n > 0$ என்போம்.

(i) (S_n) என்ற தொடர் முறை மேல் வரம்பு உடையதாக இருக்குமானால் அத் தொடர் ஒரு குவி தொடராகும்.

(ii) (S_n) என்ற தொடர் முறை மேல் வரம்பு இல்லாது இருக்குமானால் அத் தொடர் ஒரு விரி தொடராகும்.

ஒரு கந்தழித் தொடரின் தன்மையை (குவிதல் அல்லது விரிதல்) சில சோதனை முறைகளைக் கொண்டு ஆராய்ந்து அறிய லாம். பின் வரும் சோதனைகளில் எடுத்துக் கொள்ளும் தொடரின் உறுப்புகள் கூட்டெண்கள் என்று நாம் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

3·10. சோதனை 1 :

ஒப்பீட்டுச் சோதனை (Comparison test)

n-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், $\frac{u_n}{v_n} \leqslant k$ என்ற ஒரு திட்ட மான கூட்டு முழு எண் ஆனால், Σv_n ஒரு குவி தொடராகும்; Σu_n-ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

தெரிப்பு :

$$\frac{u_1}{v_1} \leqslant k \text{ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.)}$$

$$\therefore \quad u_1 \leqslant k\, v_1$$

அதேபோல் $u_2 \leqslant kv_2$

$$u_3 \leqslant kv_3$$

... ...

... ...

$$u_n \leqslant kv_n.$$

$$\therefore \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n \leqslant k(v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n)$$

$$\therefore \quad U_1 \leqslant k\, V_n.$$

$\sum_1^n u_n = U_n$ எனவும், $\sum_1^n v_n = V_n$ எனவும் கொள்க.

$\sum_1^\infty u_n = U$ எனவும், $\sum_1^\infty V_n = V$ எனவும் எடுத்துக்கொண்டோமானல், $U_n \leqslant kV_n$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $\lim\limits_{n \to 1}$ எல்லை $V_n = V$.

$\sum_1^n v_n$ என்பது ஒரு குவி தொடரின் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை. எனவே n-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் அது ஒரு மேல் வரம்புடைய எண்ணும்.

அதாவது (U_n) என்ற ஓரியல்பான ஏறும் தொடர்முறை மேல் வரம்புடையதாக இருப்பதால் (U_n) ஒரு குவி தொடராகும்.

$\therefore \quad \sum_1^\infty u_n$ என்பது ஒரு குவிதொடராகும்.

3·10. 1 ஒப்பீட்டுச் சோதனை :

$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$ என்ற ஒரு திட்டமான எல்லை இருக்கு மாயின் Σu_n-ம், Σv_n-ம் ஒருங்கே குவியும்.

தெரிப்பு :

$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \ (k \neq 0)$ என இருக்கட்டும்.

எனவே எல்லை வரையறையின்படி $\in$ என்ற எவ்வளவு சிறிய கூட்டெண் கொடுக்கப்பட்டாலும் $n \geqslant m$ என்ற மதிப்புகளுக் கொப்ப,

$$\frac{u_n}{v_n}, \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}, \quad \frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} \quad \ldots \ldots \quad \text{என்ற மதிப்புகள்}$$

$(k-\in, k+\in)$ என்ற இடைவெளிக்கு இடையே அமையும்.

$$\therefore \quad u_n < v_n (k + \in), \ (n \geqslant m)$$

Σv_n ஒரு குவி தொடர். $\therefore$ Σu_n-ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

3·11. சோதனை 2 :

n-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $\frac{u_n}{v_n} \geqslant k$ ஒரு திட்டமான கூட்டு எண் ஆக இருந்தால், Σv_n என்ற தொடர் விரி தொடரானால், Σu_n-ம் விரி தொடராகும்.

தெரிப்பு :

$\frac{u_n}{v_n} \geqslant k.$ கொடுக்கப்பட்டது.

$$\therefore \quad \frac{u_1}{v_1} \geqslant k$$

$$\therefore \quad u_1 \geqslant k\, v_1$$

அதேபோல் $u_2 \geqslant k\, v_2$

$$u_3 \geqslant k\, v_3$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$u_n \geqslant k\, v_n$$

$$\therefore \quad u_1+u_2+u_3+ \dots +u_n \geqslant k\,(v_1+v_2+v_3+ \dots +v_n)$$

$$\sum_{1}^{n} u_n \quad \geqslant k \sum_{1}^{n} v_n.$$

$\sum_{1}^{n} u_n = U_n$ எனவும், $\sum_{1}^{n} v_n = V_n$ எனவும் எடுத்துக் கொள்வோமானல்,

$U_n \geqslant k\, V_n$; Σv_n ஒரு விரி தொடர்

$\therefore$ எல்லை $\lim_{n\to\infty} V_n = \infty.$

எனவே, எல்லை $\lim_{n\to\infty} U_n = \infty.$

எனவே, Σu_n என்பது ஒரு விரி தொடராகும்.

3·11. 1 இளைச் சோதனை :

ΣV_n ஒரு விரி தொடர்.

எல்லை $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k\ (k \neq 0)$ என்ற ஒரு திட்டமான எல்லை இருக்குமாயின் Σu_n-ம் விரியும்.

தெரிப்பு :

எல்லை $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k\ (k \neq 0)$ என்று இருக்கட்டும்.

$\therefore$ எல்லை வரையறைப்படி $n \geqslant m$ என்ற மதிப்புகளுக்கொப்ப $k-\epsilon < \frac{u_n}{v_n} < k+\epsilon$ என்று அமையும்படி, ϵ என்ற மிகச் சிறிய கூட்டெண்ணும், m என்ற ஒரு கூட்டு முழு எண்ணும் காணலாம்.

$$\therefore \quad \frac{u_n}{v_n} > u-\epsilon$$

$$\therefore \quad u_n > (k-\epsilon)\, v_n\ (n \geqslant m).$$

Σv_n ஒரு விரி தொடர். $\therefore$ Σu_n-ம் விரி தொடராகும்.

குறிப்பு :

மேற்கூறிய சோதனைகளில் $k=1$ என்று கொண்டோமானால் அச் சோதனைகளைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

(i) $0 < u_n < v_n$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் Σv_n என்ற தொடர் ஒரு குவித் தொடரானால் Σu_n-ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

(ii) $u_n > v_n > 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் Σv_n என்பது ஒரு விரி தொடரானால் Σu_n-ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$1 + \frac{4}{\underline{|2}} + \frac{4^2}{\underline{|3}} + \frac{4^3}{\underline{|4}} + \ldots\ldots$ கந்தழி வரை என்ற தொடரின் குவிதல் விரிதல் தன்மையைக் காண்க.

$$1 + \frac{4}{\underline{|2}} + \frac{4^2}{\underline{|3}} + \frac{4^3}{\underline{|4}} + \frac{4^4}{\underline{|5}} + \ldots \text{ கந்தழி வரை.}$$

$$u_6 = \frac{4^5}{\underline{|6}} = \frac{4^5}{6\,.\,\underline{|5}} < \frac{4^5}{5\,.\,\underline{|5}} = v_6 \text{ என்க.} \quad \ldots (1)$$

$$u_7 = \frac{4^6}{\underline{|7}} = \frac{4^6}{7\,.\,6\,.\,\underline{|5}} < \frac{4^6}{5^2\,.\,\underline{|5}} = v_7 \text{ என்க} \quad \ldots (2)$$

$$u_8 = \frac{4^7}{\underline{|8}} = \frac{4^7}{8\,.\,7\,.\,6\,\underline{|5}} < \frac{4^7}{5^3\,.\,\underline{|5}} = v_8 \text{ என்க} \ldots (3)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

கொடுக்கப்பட்ட தொடரை $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \infty$ என்று எடுத்துக் கொண்டோமானால்.

$$1 + \frac{4}{\underline{|2}} + \frac{4^2}{\underline{|3}} + \frac{4^3}{\underline{|4}} + \ldots \text{ கந்தழி வரை}$$

$$= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \text{ கந்தழி வரை}$$

என்ற தொடரில் $u_n = \frac{4^{n-1}}{\underline{|n}}$; n-க்கு 1, 2, 3... என்ற மதிப்புகளைக் கொடுத்தால் அத் தொடரின் உறுப்புகளைக் காணலாம்.

$$\therefore \quad \sum_1^{\infty} u_n = 1 + \frac{4}{\lfloor 2} + \frac{4^2}{\lfloor 3} + \frac{4^3}{\lfloor 4} + \frac{4^4}{\lfloor 5} + \ldots$$

... கந்தழி வரை,

$$\sum_1^{\infty} v_n = 1 + \frac{4}{\lfloor 2} + \frac{4^2}{\lfloor 3} + \frac{4^3}{\lfloor 4} + \frac{4^4}{\lfloor 5} + \frac{4^5}{5 \cdot \lfloor 5}$$

$$+ \frac{4^6}{5^2 \cdot \lfloor 5} + \ldots \text{ கந்தழி வரை}$$

என்ற தொடர்களை அமைப்போம்.

இவ்விரண்டு தொடர்களின் உறுப்புகளை ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்,

$u_1 = v_1$

$u_2 = v_2$

$u_3 = v_3$

$u_4 = v_4$

$u_5 = v_5$ [(1), (2), (3) ... ... இவைகளின் மூலம்]

$u_6 < v_6$

$u_7 < v_7$

... ...

$$\therefore \quad \sum_1^{\infty} u_n < \sum_1^{\infty} v_n \text{ ஆகும்.} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (A)$$

$$\sum_1^{\infty} v_n = 1 + \frac{4}{\lfloor 2} + \frac{4^2}{\lfloor 3} + \frac{4^3}{\lfloor 4} + \frac{4^4}{\lfloor 5} + \frac{4^5}{5 \lfloor 5} = \frac{4^6}{5^2 \lfloor 5}$$

$+ \ldots \ldots$ கந்தழிவரை.

$$\left[1 + \frac{4}{\lfloor 2} + \frac{4^2}{\lfloor 3} + \frac{4^3}{\lfloor 4} + \frac{4^4}{\lfloor 5} \right] +$$

$$\frac{4^5}{5 \lfloor 5} \left[1 + \frac{4}{5} + \frac{4^2}{5^2} + \text{கந்தழி வரை.} \right]$$

$$\therefore \sum_{1}^{\infty} v_n = [\text{ஒரு திட்டமான எண்}] + \frac{4^5}{5\,\underline{|5}} \ [\text{ஒரு பெருக்குத் தொடர்}]$$

இப் பெருக்குத் தொடரின் பொது விகிதம் $x = \frac{4}{5} < 1$ என்பதால் அத் தொடர் குவிகிறது.

எனவே Σv_n என்ற தொடர் குவிகிறது. ஆகையால் (A)-ன் மூலம் (u_n) என்ற தொடர் முறையில் அத்தொடர் மேல் வரம்பை உடையதாகவுள்ளது. எனவே Σu_n ஒரு குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ என்ற தொடரின் குவிதல், விரிதல் தன்மையை ஆராய்க.

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^3} + \dots \dots + \frac{1}{1+x^n} + \dots \dots$$

கந்தழி வரை என்ற தொடரில் $u_n = \frac{1}{1+x^n}$.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^n} + \dots \dots$$ கந்தழி வரை

என்ற தொடரில் $v_n = \frac{1}{x^n}$.

$$\frac{1}{1+x^n} < \frac{1}{x^n}$$

$\therefore \quad u_n < v_n.$

$\therefore \quad u_1 < v_1$

$u_2 < v_2$

$u_3 < v_3$

... ...

... ...

$u_n < v_n.$

$$u_1 + u_2 + u_3 \dots u_n < v_1 + v_2 + v_3 \dots + v_n$$

$$\Sigma u_n < \Sigma v_n.$$

$\Sigma v_n = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ என்ற தொடர். இது ஒரு பெருக்குத் தொடர். இதன் பொது விகிதம் $\frac{1}{x}$ என்றால் இத்தொடர் ஒரு குவி தொடராகும்.

$\therefore$ $x > 1$ என்ற மதிப்பிற்கு Σu_n குவி தொடராகும்.

$x = 1$ என்றால், $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \dots + \frac{1}{2}$.

$$\therefore \quad U_n = n \cdot \frac{1}{2}.$$

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} \quad U_n = \infty.$$

$\therefore$ Σu_n என்ற தொடர் $x = 1$ என்ற மதிப்பிற்கு விரி தொடராகும்.

$0 < x < 1$ என்ற மதிப்பிற்கு,

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} \; u_n = \text{எல்லை}_{n \to \infty} \frac{1}{1 + x^n}.$$

$$= 1$$

எல்லை $u_n \neq 0$ ஆனபடியால் Σu_n ஒரு விரி தொடராகும். $n \to \infty$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \dots \dots$$

$\dots \dots$ கந்தழி வரை

இத்தொடரின் குவிதல் விரிதல் தன்மையை ஆராய்க.

$$\sum_{1}^{n} u_n = \sum_{1}^{n} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} < \frac{1}{(2n)} \cdot \frac{1}{(2n)}$$

$$\therefore \quad u_n < \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4} v_n. \qquad \therefore \quad \Sigma u_n < \frac{1}{4} \Sigma v_n.$$

$\Sigma v_n = \frac{1}{4} \Sigma \frac{1}{n^2}$ என்ற தொடர் ஒரு குவி தொடராகும். ஆகையால் Σu_n-ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$\sum \sqrt{\frac{2^n+1}{3^n+2}}$ என்ற கந்தழித் தொடரின் குவிதல் விரிதல் தன்மையைக் காண்க.

$$\sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty \sqrt{\frac{2^n+1}{3^n+2}}.$$

$$\therefore \quad u_n = \sqrt{\frac{2^n+1}{3^n+2}}$$

$v_n = \sqrt{\frac{2^n}{3^n}}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\frac{u_n}{v_n} = \sqrt{\frac{2^n+1}{3^n+2}} \div \sqrt{\frac{2^n}{3^n}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2^n+1)\times 3^n}{(3^n+2)\times 2^n}} = \sqrt{\frac{2^n\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\times 3^n}{3^n\left(1+\frac{2}{3^n}\right)\times 2^n}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{2}{3^n}}}$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{u_n}{v_n} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{2}{3^n}}} = 1.$$

எனவே இரண்டு தொடர்களும் ஒருங்கே குவியும் அல்லது விரியும்.

$V = v_1 + v_2 + v_3 \dots + v_n + \dots$ கந்தழி வரை.

$$V = \sum_{1}^{\infty} v_n = \sum_{1}^{\infty} \sqrt{\frac{2^n}{3^n}}$$ என்ற தொடர் ஒரு

பெருக்குத் தொடர். அதன் பொது விகிதம் $\sqrt{\frac{2}{3}} < 1$

ஆகையால் $\Sigma\, v_n$ ஒரு குவி தொடர் ஆகும், $\Sigma\, u_n$-ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

3·12. தேற்றம் :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots\dots$$ கந்தழி வரை,

என்ற தொடரில், (i) $p > 1$ ஆனால் அத்தொடர் குவியும்.

(ii) $p \leqslant 1$ ஆனால் அத்தொடர் விரியும்.

(i) $p > 1$ எனக் கொள்வோர்.

$$3^p > 2^p$$

$$\therefore \quad \frac{1}{3^p} < \frac{1}{2^p}$$

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{2}{2^p}$$

அதே போல்,

$$5^p > 4^p \qquad \therefore \quad \frac{1}{5^p} < \frac{1}{4^p}$$

$$6^p > 4^p \qquad \therefore \quad \frac{1}{6^p} < \frac{1}{4^p}$$

$$7^p > 4^p \qquad \therefore \quad \frac{1}{7^p} < \frac{1}{4^p}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{3^p}.$$

$$= \frac{4}{4^p}$$

$$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{4}{4^p}$$

அதே போல் $\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{10^p} + \ldots + \frac{1}{15^p} < \frac{8}{9^p}$

... ...

... ...

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட தொடர்

$$\frac{1}{1^p} + \left[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right] + \left[\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right] + \left[\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{10^p} + \ldots + \frac{1}{15^p}\right] + \ldots$$

... கந்தழி வரை

$$< \frac{1}{1^p} + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \ldots$$

என்ற கந்தழித் தொடர் ஒரு பெருக்குத் தொடராகும். இத் தொடரின் பொது விகிதம் $\frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$ ஏனெனில் $p > 1$.

ஒரு பெருக்குத் தொடரின் பொதுவிகிதம் < 1; ஆக இருக்குமானல் அப் பெருக்குத் தொடர் ஒரு குவி தொடர் என்பது நமக்குத் தெரியும். ஆகையால் நமக்குக் கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் ஒவ் வோர் அடைப்புகளிலும் உள்ள உறுப்புகள், பெருக்குத் தொடரின் உறுப்புகளைவிடக் குறைவாக இருப்பதாலும் பெருக்குத் தொடர் ஒரு குவி தொடராக இருப்பதாலும் கொடுக்கப்பட்ட தொடரும் ஒரு குவி தொடராகும். $p > 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் குவி தொடராகிறது.

(ii) $p = 1$ என்று எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$3 < 4 \qquad \therefore \quad \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$5 < 8 \qquad \therefore \quad \frac{1}{5} > \frac{1}{8}$$

$$6 < 8 \qquad \therefore \quad \frac{1}{6} > \frac{1}{8}$$

$$7 < 8 \qquad \therefore \quad \frac{1}{7} > \frac{1}{8}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

அதேபோல் $\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{16} < \frac{1}{2}$.

$$\therefore \quad 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots\dots \text{ கந்தழிவரை}$$

$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots\dots$ கந்தழிவரை என்ற தொடர் ஒரு விரி தொடராகும். ஆகையால் $p=1$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்குக் கொடுக்கப்பட்ட தொடரும் விரி தொடராகும். ஏனெனில் கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் உறுப்புகள் நாம் பெறும் $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \infty$ என்ற விரி தொடரின் உறுப்புகளை விடப் பெரியனவாக இருப்பதால், கொடுக்கப்பட்ட தொடர் $p=1$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்கு ஒரு விரி தொடராகும்.

(iii) $p < 1$ என்று எடுத்துக்கொண்டால்

$$2^p < 2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2^p} > \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{3^p} > \frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{4^p} > \frac{1}{4}$$

... ...

... ...

$\therefore \quad \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots$ கந்தழி வரை

$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \ldots$ என்ற கந்தழித் தொடர் ஒரு விரி தொடர் என்பதை இரண்டாம் பிரிவில் $p = 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் பார்த்தோம்.

ஆகையால் $p < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்

$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots$ என்ற கந்தழித் தொடர் ஒரு விரி தொடராகும். அதாவது கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் பெறப்பட்ட $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ என்ற கந்தழி, விரி தொடரின் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் விடப் பெரியதாக இருப்பதால், கொடுக்கப்பட்ட தொடரும் விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$\Sigma[\sqrt{n^2+1} - n]$ என்ற தொடர் குவி தொடரா அல்லது விரி தொடரா என்று அறிக.

$$u_n = \sqrt{n^2+1} - n$$

$$= \frac{[\sqrt{n^2+1} - n]\,[\sqrt{n^2+1} + n]}{[\sqrt{n^2+1} + n]}$$

$$= \frac{(n^2+1) - (n^2)}{[\sqrt{n^2+1} + n]} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n]}$$

$v_n = \frac{1}{2n}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{[\sqrt{n^2+1} + n]} \div \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right]} \times 2n$$

$$= \frac{2}{\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right]}$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{u_n}{v_n} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = 1.$$

எனவே, Σu_n-ம் Σv_n-ம் ஒருங்கே குவியும் அல்லது விரியும்.

$$\text{ஆனால்},\ \Sigma v_n = \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots\ \dots\right]$$

என்ற கந்தழித் தொடர் ஒரு விரி தொடர். ஏனெனில் சோதனை 3-ல் இரண்டாம் பிரிவுப்படி $p=1$ ஆகையால் அத்தொடர் விரி தொடர். எனவே, Σu_n-ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$u_n = \frac{n^2+3n+1}{n^2(n+1)^3}$ என்றால் Σu_n குவி தொடரா அல்லது விரி தொடரா ?

$$u_n = \frac{n^2+3n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$v_n = \frac{1}{n^2}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^2+3n+1}{n^2(n+1)^2} \div \frac{1}{n^2}$$

$$\therefore\ \frac{u_n}{v_n} = \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times n^2} \times n^2$$

$$= \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{u_n}{v_n} = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}$$

$$= 1.$$

ஆகையால் Σu_n-ம் Σv_n-ம், ஒருங்கே குவியும் அல்லது விரியும்.

$\Sigma v_n = \Sigma \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ கந்தழி வரை. இத் தொடரில் $p > 1$ ஆகையால் Σv_n ஒரு குவி தொடராகும். ஆகையால் Σu_n-ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$\Sigma \frac{1}{x^2+n^2}$ என்ற தொடர் குவி தொடரா அல்லது விரி தொடரா என்று அறிக.

$$\Sigma u_n = \Sigma \frac{1}{x^2+n^2}$$

$$\therefore \quad u_n = \frac{1}{x^2+n^2}.$$

$v_n = \frac{1}{n^2}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{x^2+n^2} \div \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{n^2}{x^2+n^2} = \frac{n^2}{n^2\left[\frac{x^2}{n^2} + 1\right]}$$

$$= \left[\frac{1}{1 + \frac{x^2}{n^2}}\right]$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{u_n}{v_n} = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left[\frac{1}{1 + \frac{x^2}{n^2}}\right],$$ இங்கு x ஒரு திட்டமான எண்.

$$= 1,$$

ஆகையால் Σu_n-ம், Σv_n-ம் ஒருங்கே குவியும் அல்லது விரியும்.

$\Sigma v_n = \Sigma \frac{1}{n^2}$ என்ற தொடரில் சோதனை 3 ஆல் $p > 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்கு Σv_n ஒரு குவி தொடராகும். ஆகையால் Σu_n-ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$\sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty \frac{1}{2n-1}$ என்ற தொடரின் குவி தன்மை அல்லது விரி தன்மையை அறிக.

$$u_n = \frac{1}{2n-1}$$

$$u_n = \frac{1}{2n} \text{ என்றால்}$$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{2n-1} \div \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{2n-1} \times 2n = \frac{2n}{2n\left(1-\frac{1}{2n}\right)}$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{u_n}{v_n} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{2n}{2n\left(1-\frac{1}{2n}\right)}$$

$$= 1$$

எனவே u_n-ம், v_n-ம் ஒருங்கே குவியும் அல்லது விரியும்.

$\Sigma v_n = \Sigma \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{n}$ என்ற கந்தழித் தொடர் ஒரு விரி தொடராகும். $(p=1)$ ஆகையால் Σu_n-ம் விரிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

n, m கூட்டெண்களானால் $\frac{1}{x+1} + \frac{m}{x+m} + \frac{m^2}{x+m^2} + \dots \dots$ என்ற கந்தழித் தொடரின் தன்மையை அறிக.

(i) $u_n + \frac{m^n}{x+m^n} < \frac{m^n}{x} = v_n$.

$\therefore \ \Sigma v_n = \frac{1}{x} \ \Sigma m^n$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர். அதன் பொது விகிதம் m. ஆகையால் $m < 1$ என்றால் Σv_n குவியும். எனவே Σu_n-ம் $m < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் குவியும்.

(ii) $m = 1$ என்றால் கொடுக்கப்பட்ட தொடர்

$$\Sigma u_n = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} + \dots$$

கந்தழி வரை ஒரு விரி தொடர். எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒரு விரி தொடராகும்.

(iii) $m > 1$ என்றால்

$$\frac{m^n}{x+m^n} - \frac{1}{x+1} = \frac{xm^n + m^n - x - m}{(x+m^n)(x+1)}$$

$$= \frac{x(m^n - 1)}{(x+m^n)(x+1)} > 0$$

$$\therefore \ \frac{m^n}{x+m^n} - \frac{1}{x+1} > 0$$

$$\therefore \ \frac{m^n}{x+m^n} > \frac{1}{x+1}$$

அதாவது, $u_n > \frac{1}{x+1}$

$\Sigma u_n > \sum \frac{1}{x+1}$ என்பது ஒரு விரி தொடர்.

ஆகையால் Σu_n-ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

பயிற்சி 3 (a)

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் கந்தழித் தொடர்களின் குவி / விரி/அலை தன்மையை அறிக :

1. $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.7} + \dots$

2. $\frac{1}{\sqrt{1^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{3^3+1}} + \dots$

3. $\sum \frac{(n+a)(n+b)}{n(n+1)(n+2)}$

4. $\sum \frac{\sqrt{1+4^n}}{\sqrt{1+5^n}}$

5. $\sum_{1}^{\infty} \sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}$

6. $\sum \frac{2n}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

7. $\sum \frac{n}{(n+1)^2}$

8. $\sum \frac{n^{\frac{3}{2}}}{1+n^{\frac{5}{2}}}$

9. $\sum \frac{n^2+3}{n^3+2}$

10. $\sum \frac{n^2-1}{\sqrt[3]{n^{13}+13}}$

11. $\sum \sqrt{\frac{2n^2+3}{5n^3+7}}$

12. $\sum \frac{2^n-1}{3^{3n}+1}$

13. $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$

14. $\sum \frac{n}{n^2-1}$

15. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt[4]{3n^4}}$

16. $\sum \sqrt[3]{\dfrac{3n+4}{4n+3}}$

17. $\sum \sqrt{\dfrac{5^{n+1}-2^{n-2}}{3^n-2^{n+1}}}$

18. $\sum \dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{n^p}$

19. $\sum \dfrac{1}{(1+n)^p\,(2+n)^q}$

20. $\dfrac{1^2}{2^2}+\dfrac{1^2\,.\,3^2}{2^2\,.\,4^2}+\dfrac{1^2\,.\,3^2\,.\,5^2}{2^2\,.\,4^2\,.\,6^2}+\quad\ldots$

21. $\sum \dfrac{1}{1+nx}$

22. $\sum \dfrac{n^m}{(n+1)^{m+x}}$

23. $\sum \dfrac{x^n}{1+x^n} \quad (x>0)$

24. $\sum \dfrac{(2n-1)\,(2^n)}{(2n+1)^2\,(2n+2)^2}$

25. $\sum \dfrac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}$.

3·13. விகித சோதனை 4 :

(i) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ ஆனால், Σv_n ஒரு குவி தொடரானால் Σu_n-ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

(ii) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ ஆனால், Σv_n ஒரு விரி தொடரானால் Σu_n-ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

(i) U_n என்பது Σu_n-ல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

$$\therefore \quad U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

$$= u_1 \left[1 + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_1} + \dots + \frac{u_n}{u_1} \right]$$

$$= u_1 \left[1 + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_2\, u_3}{u_3\, u_2} \cdot \frac{u_2}{u_1} + \dots \right]$$

$$\therefore \quad U_n \leqslant u_1 \left[1 + \frac{v_2}{v_1} + \frac{v_3}{v_2} \cdot \frac{v_2}{v_1} + \frac{v_4}{v_3} \cdot \frac{v_3}{v_2} \cdot \frac{v_2}{v_1} + \dots \right]$$

$$U_n \leqslant \frac{u_1}{v_1} [v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n]$$

$V_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$ என்பது ஒரு திட்டமான எண்.

$$\therefore \quad U_n \leqslant \frac{u_1}{v_1} V_n.$$

$$\therefore \quad \Sigma u_n \leqslant \frac{u_1}{v_1} \Sigma v_n.$$

$\frac{u_1}{v_1}$ = ஒரு திட்டமான எண். Σv_n ஒரு குவி தொடராகும்.

ஆகையால் (U_n) என்ற ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை மேல் வரம்புடையது எனவே Σu_n ஒரு குவி தொடராகும்.

(ii) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ என்றால், n-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$\frac{u_2}{u_1} \geqslant \frac{v_2}{v_1}$, $\frac{u_3}{u_2} \geqslant \frac{v_3}{v_2}$, ...

$$U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots \dots + u_n.$$

$$= u_1 \left[1 + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_1} + \dots + \frac{u_n}{u_1} \right]$$

$$= u_1 \left[1 + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_2}{u_1} + \dots \right]$$

$$U_n \geqslant u_1 \left[1 + \frac{v_2}{v_1} + \frac{v_3}{v_2} \cdot \frac{v_2}{v_1} + \dots \dots \right]$$

$$U_n \geqslant \frac{u_1}{v_1} \left[v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n \right]$$

$$\therefore \quad U_n \geqslant \frac{u_1}{v_1} V_n.$$

அதாவது,

$$\sum_1^n u_n \geqslant \frac{u_1}{v_1} \sum_1^n v_n.$$

$$\therefore \text{ எல்லை}_{n \to \infty} \left(\sum_1^n u_n \right) \leqslant \frac{u_1}{v_1} \cdot \text{ எல்லை}_{n \to \infty} \sum_1^n v_n = \infty$$

(ஏனெனில் Σv_n ஒரு விரி தொடர்), ஆகையால் Σu_n-ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

3·14. சோதனை 5 :

டி ஆலம்பரின் விகித் சோதனை (D' Alembert's Ratio Test)

ஒரு தொடரின் ஆரம்பத்திலிருந்தோ அல்லது குறிப்பிட்ட உறுப்புகளுக்குப் பின்போ $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1$ என்ற கட்டுப்பாடு அத் தொடருக்கும் பொருந்துமாயின் Σu_n ஒரு குவி தொடராகும்.

தெரிப்பு :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1$ என்று கொடுக்கப்பட்டது.

Σu_n என்ற கந்தழித் தொடரில் r ஆவது உறுப்பிலிருந்து கொடுபட்ட சமனின்மைக் கட்டுப்பாடு பொருந்துமாயின்,

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} < k \qquad \therefore \quad u_{r+1} < k\, u_r$$

$$\frac{u_{r+2}}{u_{r+1}} < k \qquad \therefore \quad u_{r+2} < k\, u_{r+1} < k \cdot k\, u_r$$

$$\therefore \quad u_{r+2} < k^2 u_r$$

$\frac{u_{r+3}}{u_{r+2}} < k \qquad \therefore\ u_{r+3} < k\,u_{r+2} < k\,.\,k^2\,u_r$

$\therefore\ u_{r+3} < k^3\,u_r.$

... ...

... ...

$$\therefore\ u_r + u_{r+1} + u_{r+2} \ldots \infty < u_r + k\,u_r + k^2\,u_r + \ldots \infty$$

$$u_r + u_{r+1} + u_{r+2} \ldots \infty < u_r\,[1 + k + k^2 + \ldots \infty]$$

$$\therefore\ u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \ldots \infty < \frac{u_r}{1-k}.$$

ஏனெனில் $1 + k + k^2 + k^3 \ldots \ldots \infty$ என்ற பெருக்குத் தொடரில் பொது விகிதம் $k < 1$. ஆகையால் அதன் கூட்டுத் தொகை $\frac{1}{1-k}$

$$\therefore\ u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \ldots\ldots \infty < \frac{u_r}{1-k}.$$

r ஆவது உறுப்பு வரை அத்தொடரின் கூட்டுத்தொகை ஒரு திட்டமான எண்ணும். ஒரு தொடரில் குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கை யுள்ள உறுப்புகளை நீக்குவதால் அத்தொடரின் தன்மை மாறுவ தில்லை.

எனவே Σu_n-ன் கூட்டுத்தொகை திட்டமான எண்ணாகை யால் Σu_n ஒரு குவி தொடராகும்.

3.14.1 கிளைச் சோதனை :

எல்லை $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k < 1$ எனில் Σu_n ஒரு குவி தொடராகும்.

தெரிப்பு :

எல்லை $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது).

'எல்லை' வரையறைப்படி $n > m$ என்ற மதிப்புக்கொப்ப, ϵ என்ற எவ்வளவு மிகச் சிறிய கூட்டெண் கொடுக்கப்பட்டாலும்,

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k + \epsilon$ என்ற சமனின்மை பொருந்தும்படி m என்ற ஒரு கூட்டு முழு எண் காண முடியும்,

$k < 1 \therefore k + \epsilon < 1$, ($\because$ ϵ மிக மிகச் சிறிய கூட்டெண்)

$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} < k + \epsilon < 1$. $\therefore \Sigma u_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

3·15. சோதனை 6 :

ஒரு தொடரின் ஆரம்பத்திலிருந்தோ அல்லது குறிப்பிட்ட உறுப்புகளுக்குப் பின்போ,

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ என்ற சமனின்மைக் கட்டுப்பாடு பொருந்துமாயின் Σu_n ஒரு விரி தொடராகும்.

தெரிப்பு :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) r ஆவது உறுப்பிலிருந்து அத்தொடரின் எல்லா உறுப்புகளும் சமமாக இருப்பின்,

$u_r = u_{r+1} = u_{r+2} = \dots \dots = u_{n+r}$ ஆனால்

$\therefore u_{r+1} + u_{r+2} + u_{r+3} + \dots \dots + u_{n+r} = n.u_r$

$$\therefore \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} [u_{r+1} + u_{r+2} + \dots u_{n+r}] = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} n \, . \, u_r$$

$$= \infty$$

$\therefore \Sigma u_n$ ஒரு விரி தொடராகும்.

(ii) r ஆவது உறுப்பிற்குப் பின்பு $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ என்ற சமனின்மைக் கட்டுப்பாடு பொருந்துமாயின்,

$\frac{u_{r+1}}{u_r} > 1 \quad \therefore u_{r+1} > u_r$.

$\frac{u_{r+2}}{u_{r+1}} > 1 \quad \therefore u_{r+2} > u_{r+1} > u_r$.

$\frac{u_{r+3}}{u_{r+2}} > 1 \quad \therefore \quad u_{r+3} > u_{r+2} > u_r.$

... ...

... ...

$(u_{r+1} + u_{r+2} + u_{r+3} \ldots u_{n+r}) > u_r + u_r + u_r + \ldots n$ முறை.

$\therefore \quad u_{r+1} + u_{r+2} + u_{r+3} \ldots u_{n+r} > n \cdot u_r.$

$$\lim_{n \to \infty} [u_{r+1} + u_{r+2} + u_{r+3} \ldots u_{n+r}] > \lim_{n \to \infty} n\, u_r = \infty$$

$\therefore \ \Sigma u_n$ ஒரு விரி தொடராகும்.

3·15.1 கிளைச் சோதனை :

எல்லை $\frac{u_{n+1}}{u_n} = k > 1$ எனில் Σu_n விரியும்.

தெரிப்பு :

$k >$ எனில் $k - \epsilon > 1$ ஆகும். ϵ கொடுக்கப்பட்ட மிகச் சிறிய கூட்டெண்ணாகும்.

எல்லை வரையறைப்படி, $n > m$ என்ற மதிப்புக்கொப்ப ϵ என்ற எவ்வளவு சிறிய கூட்டெண் கொடுக்கப்பட்டாலும்,

$\frac{u_{n+1}}{u_n} > k - \epsilon > 1$ என்ற சமனின்மை பொருந்தும்படி m என்ற கூட்டு முழு எண் காண முடியும்.

$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} > k - \epsilon > 1$ ஆகையால்

Σu_n ஒரு விரி தொடராகும்.

குறிப்பு :

$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ ஆனால் அத்தொடர் குவி தொடரா அல்லது விரி தொடரா என்று திட்டவட்டமாகச் சொல்ல முடியாது. ஆகவே அந்நிலையில் இச் சோதனை பயன்படாது.

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$\sum_{1}^{\infty} u_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} \cdot x^{n-1}$ என்ற தொடரின் குவிதல், விரிதல் தன்மையை அறிக. (செ. ப. க. ஏ. 61)

$$u_n = \frac{n^2}{n^3+1} x^{n-1}$$

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+1} \cdot x^n$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+1} \cdot x^n \div \frac{n^2}{n^3+1} x^{n-1}$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{n^3+1}{(n+1)^3+1} \cdot x.$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \frac{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}} \cdot x$$

$$\therefore \quad \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$= \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}} \cdot x$$

$$= x.$$

டி ஆலம்பரின் சோதனையின் படி,

$x < 1$ ஆனால் தொடர் குவி தொடராகும்.

$x > 1$ ஆனால் தொடர் விரி தொடராகும்.

$x = 1$ என்றால் இச்சோதனை பயன்படாது.

எனவே,

$u_n = \frac{n^2}{n^3+1}$ ஆனால்,

$v_n = \frac{1}{n}$ என்று எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\therefore \frac{u_n}{v_n} = \frac{n^2}{n^3+1} \div \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n^3}{n^3+1} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^3}}\right)$$

எல்லை $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

ஆகையால் Σu_n-ம் Σv_n-ம் ஒருங்கே குவியும் அல்லது விரியும்.

$$\Sigma v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \infty.$$

சோதனை 3-ன் படி Σv_n ஒரு விரி தொடர். ஆகையால் Σu_n-ம் ஒரு விரி தொடராகும். எனவே, $x = 1$ ஆனால் கொடுக்கப் பட்ட தொடர் ஒரு விரி தொடராகும்.

அத்தொடரின் தன்மையை ஒன்று சேர்த்து எழுதுவோமானால்,

$x < 1$ ஆனால் தொடர் குவியும்.

$x > 1$ ஆனால் தொடர் விரியும்.

$x = 1$ ஆனால் தொடர் விரியும்.

எடுத்துக்காட்டு 11 :

$\displaystyle\sum_{1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - n)\, x^n$ என்ற தொடர் குவி தொடரா அல்லது விரி தொடரா எனக் காண்க.

$$u_n = [\sqrt{n^2+1} - n]\; x^n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\, x^n$$

$$u_{n+1} = [\sqrt{(n+1)^2+1} - (n+1)]\, x^{n+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}\, x^{n+1}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}\,(n+1)} \cdot x$$

$$= \frac{\left[\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1\right]}{\left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]} x$$

$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x.$

$\therefore \sum_{1}^{\infty} u_n$ என்ற தொடர் $x < 1$ ஆனால் குவி தொடராகும்.

$x > 1$ ஆனால் விரி தொடராகும்.

$x = 1$ ஆனால் டி. ஆலம்பரின்

சோதனை பயன்படுவதில்லை. எனவே

$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$ ஆனால்

$v_n = \frac{1}{n}$ என்று எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\therefore \frac{u_n}{v_n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1}$$

$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{2}.$

$\therefore \sum_{1}^{\infty} u_n$-ம் $\sum_{1}^{\infty} v_n$-ம் ஒருங்கே குவியும் அல்லது விரியும்.

$\sum_{1}^{\infty} v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \infty$ என்பது ஒரு விரி தொடர். ஆகையால் $\sum_{1}^{\infty} u_n$-ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

$\therefore x < 1$ ஆனால் குவி தொடராகும்.

$x \geqslant 1$ ஆனால் விரி தொடர் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 12 :

$\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{1+n\,.\,x^n}$ என்ற தொடரின் குவி, விரி தன்மையைக் காண்க.

$$u_n = \frac{1}{1+n\,x^n}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{1+(n+1)\,x^{n+1}}$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+(n+1)\,x^{n+1}} \div \frac{1}{1+n\,x^n}\,.$$

$$= \frac{1+n\,x^n}{1+(n+1)\,x^{n+1}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{n\,x^n}+1}{\dfrac{1}{n\,x^n}+\left(1+\dfrac{1}{n}\right)x}$$

$x > 1$ எனில்,

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{x}$$

(i) $\dfrac{1}{x} < 1$ ஆனால் அத்தொடர் குவி தொடர். எனவே, $x > 1$ ஆனால், $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

(ii) $\dfrac{1}{x} > 1$ அதாவது, $x < 1$ ஆனால்,

$$1+x < 2. \qquad \therefore \frac{1}{1+x} > \frac{1}{2}\,.$$

$$1+2x^2 < 3 \qquad \therefore \quad \frac{1}{1+2x^2} > \frac{1}{3}$$

... ...

... ...

$$\therefore \quad u_n > \frac{1}{n+1} = v_n.$$

$\sum_{1}^{\infty} v_n$ ஒரு விரி தொடர். ஆகையால் $\sum_{1}^{\infty} u_n$ -ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

(iii) $\frac{1}{x} = 1$ என்றால் $x = 1 \quad \therefore \quad u_n = \frac{1}{1+n}$

$\therefore \quad \sum_{1}^{\infty} u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ என்பது விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 13:

$\frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{x+2} + \frac{x^3}{x+3} + \ldots \infty$ என்ற தொடரின் குவி / விரி தன்மையை அறிக.

$$u_n = \frac{x^n}{x+n}$$

$$u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{x+(n+1)}$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{x+(n+1)} \div \frac{x^n}{x+n}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{x+(n+1)} \times \frac{x+n}{x^n}$$

$$= \frac{x+n}{x+n+1} \cdot x = \left[\frac{1+\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}+\frac{1}{n}} \right] x$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left[\frac{1 + \dfrac{x}{n}}{1 + \dfrac{x}{n} + \dfrac{1}{n}} \right] x = x.$$

$\therefore$ $x < 1$ ஆனால் அத் தொடர் குவி தொடர்.

$x > 1$ ஆனால் அத் தொடர் விரி தொடர்.

$x = 1$ ஆனால் $u_n = \dfrac{1}{1+n}$ $\quad \therefore \quad v_n = \dfrac{1}{n}$.

$\sum\limits_{1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ என்ற தொடர் ஒரு விரி தொடர்.

$$\therefore \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{u_n}{v_n} = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{n}{1+n}$$

$$= \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} = 1.$$

எனவே Σu_n-ம் Σv_n-ம் ஒருங்கே குவியும் அல்லது விரியும். ஆனால் Σv_n ஒரு விரி தொடர். ஆகையால் Σu_n-ம் விரி தொடராகும்.

$\therefore$ $x < 1$ ஆனால் Σu_n குவி தொடராகும்.

$x \geqslant 1$ ஆனால் Σu_n விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 14 :

$\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{x_n + x^{-n}}$, $(x > 0)$ என்ற தொடரின் குவிதல், விரிதல் தன்மையைக் காண்க.

(i) $x > 1$ என்றால்

$x^n + x^{-n} > x^n$

$$\therefore \frac{1}{x^n + x^{-n}} < \frac{1}{x^n}$$

$$\sum_{1}^{\infty} u_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}}$$ ஆனால்

$$\sum_{1}^{\infty} v_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

$$\therefore \sum_{1}^{\infty} u_n < \sum_{1}^{\infty} v_n$$

$\sum_{1}^{\infty} v_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$ என்ற பெருக்குத் தொடரில் பொது விகிதம் $\frac{1}{x} < 1$. ஆகையால் $\sum_{1}^{\infty} v_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

$$\therefore \sum_{1}^{\infty} u_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}}$$ ஒரு குவி தொடராகும்

(ii) $0 < x < 1$ ஆனால்

$$x^n + x^{-n} > x^{-n} \quad \therefore \frac{1}{x^n + x^{-n}} - \frac{1}{x^{-n}} = x^n$$

$$\therefore \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}} < \sum_{1}^{\infty} x^n$$

$\sum_{1}^{\infty} x^n$ என்ற பெருக்குத் தொடரில் பொது விகிதம் $x < 1$ என இருப்பதால் அத் தொடர் $\sum_{1}^{\infty} x^n$ ஒரு குவி தொடர். ஆகையால் $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}}$ -ம் ஒரு குவி தொடராகும்,

(iii) $x = 1$ ஆனால்

$$\frac{1}{x^n + x^{-n}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \dots$$

= விரி தொடர்.

$\therefore$ $x > 0$ ஆனால்

$x \gtrless 1$-க்கு $\sum \frac{1}{x^n + x^{-n}}$ ஒரு குவி தொடர்.

$x = 1$-க்கு $\sum \frac{1}{x^n + x^{-n}}$ ஒரு விரி தொடர்.

3·16. சோதனை 7 :

கோசியின் மூலசோதனை (Cauchy's Root Test)

கூட்டெண் உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கந்தழித் தொடர்

(i) $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} (u_n)^{1/n} = l < 1$ என்றால் Σu_n ஒரு குவி தொடராகும்.

(ii) $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} (u_n)^{1/n} = l > 1$ என்றால் Σu_n ஒரு குவி தொடராகும்.

தெரிப்பு : (i)

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} (u_n)^{1/n} = l.$$

$$\therefore \quad |(u_n)^{1/n} - l| < \epsilon$$

$n \geqslant m$ என்ற மதிப்புகளுக்கு, ஒரு குறிப்பிட்ட சிறிய ϵ-க்கு $l - \epsilon < (u_n)^{1/n} < l + \epsilon$ என்று பொருந்தும் வகையில் ஒரு m காணலாம்.

$l < 1$ என்றால்,

$l < k < 1$ என்று பொருந்தும் வகையில் k எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்,

$l+\epsilon<k<1$ என்று பொருந்தும் வகையில் ϵ எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். இதற்குத் தக்க $m\leqslant n$ எனில்,

$$l-\epsilon<(u_n)^{1/n}<l+\epsilon$$

$$\therefore\ (u_n)^{1/n}<k.$$

$u_n\quad<k^n.\qquad n\geqslant m$ என்ற மதிப்புகளுக்கு.

$$\therefore\ \sum_1^{\infty}\ u_n<\sum_1^{\infty}k^n$$

$\sum\limits_1^{\infty}k^n$ என்ற பெருக்குத் தொடரில் பொதுவிகிதம் $k<1$.

எனவே, $\sum\limits_1^{\infty}k^n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

$\therefore\ \sum\limits_1^{\infty}u_n$-ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

(ii) எல்லை $\underset{n\to\infty}{(u_n)^{1/n}}=l>1$.

$l-\epsilon>1$ என்று பொருந்தும்படி ϵ என்ற மிகச் சிறிய எண்ணை எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

$n>m$ என்ற மதிப்புகளுக்கு

$$(u_n)^{1/n}>l-\epsilon>1.$$

$$\therefore\ u_n>(l-\epsilon)^n$$

$$\therefore\ \sum_1^{\infty}u_n>\sum_1^{\infty}(l-\epsilon)^n$$

$\sum_{1}^{\infty} (l - \epsilon^n)$ என்ற பெருக்குத்தொடரில், அதன் பொது விகிதம் $l - \epsilon > 1$ என்றபடியால் அத்தொடர் $\Sigma (l - \epsilon)^n$ விரி தொடராகும்.

எனவே $\sum_{1}^{\infty} u_n$ என்ற தொடரில் m ஆவது உறுப்பும், அதற்கு அடுத்து வரும் உறுப்புகளும், $\Sigma (l - \epsilon)^n$ என்ற விரி தொடரின் உறுப்புகளைவிடப் பெரியனவாக உள்ளன.

$\therefore \sum_{1}^{\infty} n$ என்பது ஒரு விரி தொடர்.

குறிப்பு :

$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} (u^n)^{1/n} = 1$ என்றால் இச்சோதனை பயன்படாது.

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$\sum_{1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(1+n)^{n^2}}$-ன் குவி/விரி தன்மையை அறிக.

$$u_n = \frac{n^{n^2}}{(1+n)^{n^2}} = \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n^2}$$

$$u_n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n^2}$$

$$(u_n)^{1/n} = \left[\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n^2}\right]^{1/n} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}$$

$$\therefore \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} u_n^{1/n} = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{e} < 1$$

$\therefore$ Σu_n ஒரு குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 16 :

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \dots \dots + \frac{1}{S_n} + \dots \dots$ என்ற தொடரில் $S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}$ என்றால் அத்தொடரின் குவி/விரி தன்மையை அறிக.

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots 2^{n-1} = 2^n - 1$$

$$\therefore \quad u_n = \frac{1}{S_n} = \frac{1}{2^n - 1}$$

$$(u_n)^{1/n} = \left(\frac{1}{2^n - 1}\right)^{1/n} = \frac{1}{(2^n - 1)^{1/n}}$$

$$= \frac{1}{\left[2^n\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right]^{1/n}}$$

$$= \frac{1}{2\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{1/n}}$$

$$\therefore \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} (u_n)^{1/n} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{1/n}}$$

$$\left[\because \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{1/n} = 1\right]$$

$$= \frac{1}{2} < 1.$$

$\therefore$ Σu_n என்ற தொடர் ஒரு குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 17 :

$\sum \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+n)}{n^n}$ என்ற தொடரின் குவிதல், விரிதல் தன்மையை அறிக.

$$u_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{(n+2)}{n} \cdot \frac{(n+3)}{n} \dots \frac{(n+n)}{n}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\dots\dots\left(1+\frac{n}{n}\right).$$

$$\therefore \quad (u_n)^{1/n} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{1/n}$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} (u_n)^{1/n} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\dots\dots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{1/n}$$

$= k$ என்று எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \log \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\dots\dots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{1/n}$$

$$= \log k$$

இடப் புறம்,

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \log \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{1/n}$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{r}{n}\right)$$

$$= \int_0^1 \log(1+x)\, dx$$

$$= [x \log(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\, dx$$

$$= \log 2 - [x - \log(1+x)]_0^1$$

$$= 2\log 2 - 1 = \log 4 - \log e$$

$$= \log \frac{4}{e}.$$

$$\therefore \log \frac{4}{e} = \log k.$$

$\therefore\ k = \dfrac{4}{e} < 1.$ $\quad \therefore$ எல்லை $\underset{n \to \infty}{} (u_n)^{1/n} = k > 1$

$\therefore\ \Sigma u_n$ ஒரு விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 18 :

$\sum \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}$ என்ற தொடரின் குவி/விரி தன்மையை அறிக.

$$u_n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

$$(u_n)^{1/n} = \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}\right]^{1/n}$$

$$(u_n)^{1/n} = \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}\right]^{1/n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} (u_n)^{1/n} = \text{எல்லை}_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{e} < 1.$$

$\therefore \sum_{1}^{\infty} u_n$ என்ற தொடர் குவி தொடராகும்.

3·17. சோதனை 8: கோசியின் ஒடுக்கற் சோதனை (Cauchy's Condensation Test):

$f(n) > 0, f(n+1) \leqslant f(n)$ ஆனால் n-ன் எல்லாக் கூட்டெண் மதிப்புகளுக்கும், $a > 1$ என்ற கூட்டு முழு எண்ணிற்கு $\Sigma f(n)$-ம், $\Sigma a^n f(a^n)$-ம் ஒருங்கே குவியும் அல்லது ஒருங்கே விரியும்.

தெரிப்பு :

$\Sigma f(n)$ ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$$\begin{aligned}\Sigma f(n) = & [f(1) + f(2) + \dots + f(a)] \\ & + [f(a+1) + f(a+2) + \dots + f(a^2)] \\ & + [f(a^2+1) + f(a^2+2) + \dots + f(a^3)] \\ & + \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ & + [f(a^{n-1}+1) + f(a^{n-1}+2) + \dots + f(a^n)] \\ & + \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ & + \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\end{aligned}$$

இவ்வடைப்புகளுக்குள் உள்ள கூட்டுத் தொகைகளை $u_1, u_2, \dots u_n, \dots$ என்போம். அவ்வடைப்புக்குள் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முறையே,

$$a, (a^2 - a), (a^3 - a^2), \dots (a^n - a^{n-1}), \dots$$

$$\Sigma f(n) = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \Sigma u_n.$$

$\therefore \; u_n = f(a^{n-1}+1) + f(a^{n-1}+2) + \dots + f(a^n)$

$= n$ ஆவது அடைப்புக்குள் உள்ள $(a^n - a^{n-1})$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை.

$$f(a^{n-1}) \geqslant f(a^{n-1}+1) \geqslant f(a^{n-1}+2) \geqslant \dots \geqslant f(a^n)$$

$$\therefore \; (a^n - a^{n-1}) f(a^{n-1}) \geqslant u_n \geqslant (a^n - a^{n-1}) f(a^n)$$

$$(a-1)\,a^{n-1}\,f(a^{n-1}) \geqslant u_n \geqslant \left(1-\frac{1}{a}\right)a^n f(a^n)\ldots(A)$$

$$u_n \leqslant (a-1)\,a^{n-1}\,f(a^{n-1})$$

$$\therefore\quad u_2 \leqslant (a-1)\,a\,f(a)$$

$$u_3 \leqslant (a-1)\,a^2\,f(a^2)$$

$$u_4 \leqslant (a-1)\,a^3\,f(a^3)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\therefore\quad \sum_{n=2}^{\infty} u_n \leqslant (a-1)\,[a f(a) + a^2 f(a^2) + a^3 f(a^3) + \ldots \infty]$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_n \leqslant (a-1)\,\Sigma\, a^n f(a^n)$$

$\Sigma\, a^n f(a^n)$ என்ற தொடர் ஒரு குவி தொடராயின்,

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$-ம் ஒரு குவி தொடராகும். இத்தொடருடன் u_1 ஐக் கூட்டுவதால் இதன் தன்மை மாறுவதில்லை.

$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n$-ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

(A)-ன் மூலம்,

$$u_n \geqslant \left(1-\frac{1}{a}\right) a^n f(a^n).$$

$$\therefore\quad u_1 \geqslant \left(1-\frac{1}{a}\right) a\, f(a).$$

$$u_2 \geqslant \left(1-\frac{1}{a}\right) a^2 f(a^2).$$

$$u_3 \geqslant \left(1 - \frac{1}{a}\right) a^3 f(a^3).$$

... ...

... ...

$$\therefore \; u_1 + u_2 + u_3 \dots \infty \geqslant \left(1 - \frac{1}{a}\right) [\, a f(a) + a^2 f(a^2) + \dots \dots \infty \,]$$

$$\sum_{1}^{\infty} u_n \geqslant \left(1 - \frac{1}{a}\right) \Sigma\, a^n f(a^n),$$

$\Sigma a^n f(a^n)$ ஒரு விரி தொடராயின் Σu_n-ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

எனவே, $\sum_{1}^{\infty} u_n = \sum_{1}^{\infty} f(n)$-ம், $\sum_{1}^{\infty} a^n \; f(a^n)$-ம் ஒருங்கே குவியும் அல்லது விரியும்,

எடுத்துக்காட்டு 19 :

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ ஒரு விரி தொடர் என்று நிறுபி.

a ஒரு கூட்டு முழு எண்ணுனால்,

$$f(n) = \frac{1}{\log n},$$

$$a^n f(a^n) = a^n \cdot \frac{1}{\log a^n} = \frac{a^n}{n \log a} = \frac{a^n}{n} \cdot \frac{1}{\log a}$$

$$\Sigma\, a^n f(a^n) = \sum \frac{a^n}{n} \cdot \frac{1}{\log a} = \frac{1}{\log a} \sum \frac{a^n}{n}.$$

$\sum \frac{a^n}{n}$ என்ற தொடர் ஒரு விரி தொடர். எனவே,

$\frac{1}{\log a} \sum \frac{a^n}{n} = \Sigma a^n f(a^n)$-ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

$$\left(\text{ஏனெனில்} \quad \frac{a^n}{n} > \frac{1}{n \log a}\right)$$

$\therefore \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ ஒரு விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 20 :

$\sum \frac{1}{n(\log n)^p}$ என்ற தொடர் $p > 1$ ஆனால் குவியும், $p \leqslant 1$ ஆனால் விரியும்.

$f(n) = \frac{1}{n(\log n)^p}$ ஆனால், a என்ற நேர் முழு எண்ணுக்கு,

$$(a > 1),$$

$$a^n f(a^n) = \frac{a^n}{a^n (\log a^n)^p}$$

$$= \frac{1}{(n \log a)^p} = \frac{1}{n^p (\log a)^p}$$

$$\therefore \quad \Sigma a^n f(a^n) = \sum \frac{1}{n^p (\log a)^p}$$

$$= \frac{1}{(\log a)^p} \sum \frac{1}{n^p}.$$

$\therefore \quad p > 1$ ஆனால் $\Sigma a^n f(a^n)$ குவி தொடராகும்.

எனவே $\sum_{2}^{\infty} f(n)$-ம் குவி தொடராகும்.

$p \leqslant 1$ ஆனால் $\Sigma a^n f(a^n)$ ஒரு விரி தொடர்.

எனவே $\sum_{2}^{\infty} f(n)$-ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

3·18. சோதனை 9 :

இராபியின் விகித சோதனை (Raabe's Ratio Test):

Σu_n என்ற தொடரில், $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ n\left[\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] = l$ ஆனால்

(i) $l > 1$ ஆனால் Σu_n ஒரு குவி தொடர்.

(ii) $l < 1$ ஆனால் Σu_n ஒரு விரி தொடர்.

தெரிப்பு :

$\Sigma v_n = \sum \dfrac{1}{n^p}$ என்ற தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\sum \dfrac{1}{n^p}$ என்ற தொடர் $p > 1$ ஆனால் குவியும்; $p \leqslant 1$ ஆனால் விரியும்.

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ n\left[\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right] = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ n\left[\frac{(n+1)^p}{n^p} - 1\right]$$

$$= \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ n\left[\frac{n^p\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{n^p} - 1\right]$$

$$= \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}}\right]$$

$$= \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1^p}{\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1}\right]$$

$$= p \cdot 1^{p-1} = p$$

$$\therefore \left| n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right) - p \right| < \epsilon.$$

எனவே ϵ என்ற மிகச் சிறிய கூட்டெண் கொடுக்கப்பட்டாலும் $n > m_1$ ஆனால் $p - \epsilon < n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right) < p + \epsilon$ எனப் பொருந்தும்படி m_1 காணலாம்.

அதேபோல் $n > m_2$ ஆனால்

$$l - \epsilon < n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < l + \epsilon$$ எனப் பொருந்தும்படி m_2 காணலாம்.

$l > 1$ என்றால் $l > p > 1$ என்று பொருந்தும்படி p ஐ எடுத்துக்கொண்டு ϵ என்ற மிகச் சிறிய கூட்டெண்ணுக்கு $n > m$ என்ற மதிப்பிற்கு $l - \epsilon > p + \epsilon$ என்று அமையும்படி m ஐ எடுத்துக் கொண்டால்,

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right)$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{v_n}{v_{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

எனவே $p > 1$ ஆனால் $\Sigma v_n = \Sigma \frac{1}{n^p}$ ஒரு குவி தொடராகும். (சோதனை 4-ன் படி)

$\therefore$ Σu_n-ம் குவி தொடராகும்.

(ii) $l < 1$ ஆனால் $l < p < 1$ என்று பொருந்தும்படி p ஐ எடுத்துக் கொண்டால், ϵ என்ற மிகச்சிறிய கூட்டு எண்ணை $l + \epsilon < p - \epsilon$ என்று அமையும்படி எடுத்துக் கொள்வோம். இதற்குத் தக்கபடி m ஒன்றை, $m \leqslant n$ எனில்,

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right)$$

என்றபடி காண முடியும்.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{v_n}{v_{n+1}}$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

(விகித)சோதனை 4-ன் படி $p < 1$ ஆனுல், $\Sigma v_n = \sum \frac{1}{n^p}$ ஒரு விரி தொடராகும்.

$\therefore$ Σu_n-ம் விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 21 :

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)} \cdot \frac{x^n}{2n-1}$ என்ற தொடர் குவி தொடரா அல்லது விரி தொடரா எனக் காண்க.

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)} \cdot \frac{x^n}{2n-1}$$

$$u_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} \cdot \frac{x^{n+1}}{2n+1}$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}\, x$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2n}}{1} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{2n}} \cdot x$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)} \cdot x$$

$$= x.$$

$x < 1$ ஆனுல் Σu_n ஒரு குவி தொடர்.

$x > 1$ ஆனுல் Σu_n ஒரு விரி தொடர்.

$x = 1$ ஆனால்

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2}$$

$$\therefore \quad n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] = \frac{n(6n-1)}{(2n-1)^2}$$

$$\text{எல்லை } n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{n^2\left(6 - \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2}$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{\left(6 - \frac{1}{n}\right)}{\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1.$$

$x = 1$ ஆனால் Σu_n ஒரு குவி தொடராகும்.

(i) $x \leqslant 1$ ஆனால் குவியும்.

(ii) $x > 1$ ஆனால் விரியும்.

எடுத்துக்காட்டு 22 :

$$u_n = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots (2n-2)^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (2n-1)\, 2n} \cdot x^{2n}$$

ஆனால் $\sum_{1}^{\infty} u_n$ ஒரு குவி தொடரா அல்லது விரி தொடரா எனக் காண்க.

$$u_n = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots (2n-2)^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \quad (2n-1) \cdot 2n} \cdot x^{2n}$$

$$u_{n+1} = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots (2n-2)^2\, (2n)^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (2n+1)(2n+2)} \cdot x^{2n+2}$$

$$\therefore \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n)^2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(2n)\left(1+\frac{1}{2n}\right)(2n)\left(1+\frac{2}{2n}\right)}{(2n)^2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{2}{2n}\right) \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2}.$$

$\therefore$ $x < 1$ ஆனால் Σu_n ஒரு குவி தொடராகும்

$x > 1$ ஆனால் Σu_n ஒரு விரி தொடராகும்.

$x = 1$ ஆனால், $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{n(6n+2)}{(2n)^2}$

$$\therefore \quad \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{n^2\left(6+\frac{2}{n}\right)}{n^2 \cdot 4}$$

$$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1.$$

$\therefore$ Σu_n ஒரு குவி தொடராகும்.

$\therefore$ $x \leqslant 1$ ஆனால் Σu_n ஒரு குவி தொடர்,

$x > 1$ ஆனால் Σu_n ஒரு விரி தொடர்.

எடுத்துக்காட்டு 23 :

$$\frac{2}{3.4} + \frac{2.4}{3.5.6} + \frac{2.4.6}{3.5.7.8} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9.10} + \ldots\ldots\ldots \infty$$

என்ற தொடர் ஒரு குவி தொடர் என நிறுவுக.

$$u_n = \frac{2.4.6.8 \ldots 2n}{3.5.7 \ldots (2n+1)} \cdot \frac{1}{2n+2}$$

$$u_{n+1} = \frac{2.4.6.8 \ldots \ldots 2n.(2n+2)}{3.5.7 \ldots \ldots (2n+3)} \cdot \frac{1}{2n+4}$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+3} \cdot \frac{2n+2}{2n+4}$$

$$\therefore \quad n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] = n\left[\frac{(2n+3)(2n+4)}{(2n+2)(2n+2)} - 1\right]$$

$$= n\left[\frac{6n+8}{(2n+2)^2}\right]$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\; n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\; n\left[\frac{n\left(6+\dfrac{8}{n}\right)}{n^2\left(2+\dfrac{2}{n}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} < 1$$

$\therefore$ Σu_n ஒரு குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 24 :

$$\sum_{1}^{\infty} u_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \ldots 3n}{4 \cdot 7 \cdot 10 \ldots (3n+1)} \cdot \frac{x^n}{3n+2}$$

என்ற தொடரின் குவி/விரி தன்மையை அறிக.

$$u_n = \frac{3.6.9 \ldots 3n}{4.7.10 \ldots (3n+1)} \cdot \frac{x^n}{(3n+2)}$$

$$u_{n+1} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \ldots 3n\,(3n+3)}{4 \cdot 7 \cdot 10 \ldots (3n+1)(3n+4)} \cdot \frac{x^{n+1}}{3n+5}.$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+3}{3n+4} \cdot \frac{3n+2}{3n+5} \cdot x$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\; \frac{u_{n+1}}{u_n} = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\; \frac{\left(3+\dfrac{3}{n}\right)\left(3+\dfrac{2}{n}\right)}{\left(3+\dfrac{4}{n}\right)\left(3+\dfrac{5}{n}\right)} \cdot x$$

$$= x.$$

$\therefore\ x < 1$ ஆனால் Σu_n ஒரு குவி தொடர்.

$x > 1$ ஆனால் Σu_n ஒரு விரி தொடர்.

$x = 1$ ஆனால்,

$$n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] = n\left[\frac{(3n+4)(3n+5)}{(3n+3)(3n+2)} - 1\right]$$

$$= n\left[\frac{12n + 14}{(3n+3)(3n+2)}\right]$$

$$= n^2\left[\frac{12 + \frac{14}{n}}{n^2\left(3 + \frac{3}{n}\right)\left(3 + \frac{2}{n}\right)}\right]$$

$$= \frac{12 + \frac{14}{n}}{\left(3 + \frac{3}{n}\right)\left(3 + \frac{2}{n}\right)}$$

$$\therefore \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{12 + \frac{14}{n}}{\left(3 + \frac{3}{n}\right)\left(3 + \frac{2}{n}\right)}$$

$$= \frac{12}{9} = \frac{4}{3} > 1.$$

$\therefore\ x = 1$ ஆனால் Σu_n ஒரு குவி தொடராகும்.

3·19. டிமார்கான், பெர்டிராண்டின் சோதனை 10 :

Σu_n என்ற கூட்டு எண் தொடரில்,

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ \log n\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = k \text{ ஆனால்}$$

$k > 1$-க்கு அத்தொடர் குவியும்; $k < 1$-க்கு அத்தொடர் விரியும்.

தெரிப்பு :

$v_n = \dfrac{1}{n(\log n)^p}$ என்று கொண்டால் Σv_n என்ற தொடர், $p > 1$ என்ற மதிப்பிற்குக் குவியும் $p < 1$ என்ற மதிப்பிற்கு விரியும்.

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{(n+1)\,[\log(n+1)]^p}{n\,[\log n]^p}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left[1 + \frac{1}{\log n}\cdot\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^p$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left[1 + \frac{1}{n\log n} - \frac{1}{2n^2\log n} + \frac{1}{3n^3\log n}\cdots\cdots\right]$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left[1 + \frac{p}{n\log n} + \frac{-p}{2n^2\log n} + \cdots\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{n} + \frac{p}{n\log n} + \frac{p}{n^2\log n}\cdots\cdots$$

$\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{K}{n\log n} +$; $K > 1$ என்று இருக்குமானால் $1 < p < K$ என்று அமையும்படி p ஐ எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

$\therefore\ \dfrac{u_n}{u_{n+1}} > \dfrac{v_n}{v_{n+1}}$. எனவே Σv_n குவியும்.

$\therefore\ \Sigma u_n$-ம், $K > 1$ என்ற மதிப்பிற்குக் குவி தொடராகும்.

ஆனால் எல்லை $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log n\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = K$

$\therefore\ \Sigma u_n$ என்ற தொடர்,

எல்லை $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log n\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = K > 1$

என்றிருக்கும்போது குவி தொடராகும்.

n-ன் மிகப் பெரிய மதிப்புகளுக்கு, p ஐ $K < p < 1$ என்று அமையும்படி எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{v_n}{v_{n+1}}.$$

எனவே Σv_n விரியும். $\therefore$ $K < 1$-க்கு, Σu_n-என்ற தொடரும் விரியும்.

அதாவது $\lim_{n \to \infty} \log n \left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] = K < 1$

என்ற மதிப்பிற்கு Σu_n ஒரு விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 26 :

$\frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 . 3^2}{2^2 . 4^2} + \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2 . 6^2} + \ldots$ என்ற தொடரின் குவி/விரி தன்மையை அறிக.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{n} + \frac{A}{n^2} + \ldots \ldots$$

இங்கு $A = \dfrac{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)} = -\frac{1}{4}$; $n \to \infty$ என்னும்போது.

$\therefore$ எல்லை $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$; டி ஆலம்பரின் சோதனை இங்குப் பயன்படவில்லை.

எனவே ராபியின் சோதனையைச் செய்து பார்த்தால்,

எல்லை $\lim_{n \to \infty} \left\{ n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \right\} = 1$ ஆகிறது. எனவே ராபியின் சோதனையும் பயன்படாது.

எனவே டி மார்கான், பெர்டிரன்டின் சோதனைபடி,

$$\left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \log n = A \left(\frac{\log n}{n} \right)$$

+ மதிப்பில் மிகக் குறைவான உறுப்புகள்.

$$\therefore \text{ எல்லை } \left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1 \right] \log n = 0$$

$$\left[\text{குறிப்பு: } \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{\log n}{n} = 0 \right]$$

ஏனெனில் $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \dfrac{\log n}{n} = 0.$

$$\therefore \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1 \right] \log n = 0.$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் டிமார்கான் சோதனைப்படி ஒரு விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 27 :

$$u_n = \left\{ \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,\ldots\, (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,\ldots\ldots\, 2n} \right\}^2 \left\{ \frac{n}{n+1} \right\} \text{ என்றால்}$$

Σu_n குவி தொடரா அல்லது விரி தொடரா ?

$$\text{(i)} \quad \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

$$= \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{4n(n+2)}{4n^2 + 4n + 1} = 1.$$

எனவே டி ஆலம்பரின் சோதனை பயனில்லை.

$$\text{(ii)} \quad \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$$

$$= \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left[n\left(\frac{4n^2 + 6n - 4n^2 - 4n - 1}{4n^2 + 4n + 1}\right) \right]$$

$$= \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{4n^2 - n}{4n^2 + n + 1} = 1.$$

எனவே ராபியின் சோதனையும் பயனில்லை.

(iii) எனவே டி மார்கான் சோதனைப்படி,

$$\text{எல்லை} \left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1 \right] \log n$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left(\frac{4n^2 - n - 4n^2 - 4n - 1}{4n^2 + 4n + 1}\right) \log n$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \log \left(\frac{-5n}{4n^2}\right) \log n = 0.$$

எனவே, Σu_n என்ற தொடர் டி மார்கான் சோதனையின்படி ஒரு விரி தொடராகும்,

3·20. சோதனை 11 :

மடக்கைச் சோதனை (Logarithimic Test)

ஒரு கூட்டு எண்ணைக் கொண்ட ஒரு தொடரில்

(i) $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left(n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) > 1$ ஆனால் அத்தொடர் குவி தொடராகும்.

(ii) $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left(n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) < 1$ ஆனால் அத்தொடர் விரி தொடராகும்.

தெரிப்பு :

(i) $\Sigma u_n = \sum \frac{1}{n^p}$ என்ற தொடரை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{(n+1)^p}{n^p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$$

$p > 1$ ஆனால் Σv_n ஒரு குவி தொடராகும். மேலும்

$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{v_n}{v_{n+1}}$ ஆனால் Σu_n-ம் குவியும்.

$$\therefore \frac{u_n}{u_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p.$$

$$\therefore \log \frac{u_n}{u_{n+1}} > p \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

$$\log \frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{p}{n} - \frac{p}{2n^2} + \ldots\ldots$$

$$n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} > p - \frac{p}{2n}$$

$$\therefore \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\, n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} > \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left[p - \frac{p}{2n} + \ldots\ldots \right]$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\, n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} > p > 1$$

(ii) $p < 1$ ஆனல் Σv_n ஒரு விரி தொடர்.

$\therefore \dfrac{u_n}{u_{n+1}} < \dfrac{v_n}{v_{n+1}}$ ஆனல் Σu_n ஒரு விரி தொடர்.

$$\therefore \frac{u_n}{u_{n+1}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p.$$

$$\therefore \log \frac{u_n}{u_{n+1}} < p \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

$$\log \frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{p}{n} - \frac{p}{2n^2} + \ldots$$

$$\therefore n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} < p - \frac{p}{2n} + \ldots$$

$$\therefore \text{எல்லை} \left[n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} \right] < \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(p - \frac{p}{2n} + \ldots \right)$$

$\therefore$ எல்லை $\left[n \log \dfrac{u_n}{u_{n+1}} \right] < p < 1$ ஆனல்

Σu_n ஒரு விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 28 :

கீழே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் குவி தொடரா அல்லது விரி தொடரா ?

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{\lfloor 2}{3^2} \cdot x^2 + \frac{\lfloor 3}{4^3} \cdot x^3 + \frac{\lfloor 4}{5^4} \cdot x^4 + \dots \dots \infty$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\lfloor n-1}{n^{n-1}} \cdot x^{n-1} \div \frac{\lfloor n}{(n+1)^n} \cdot x^n$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{1}{x} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{x}.$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{e}{x}.$$

$\therefore$ $x < e$ ஆனால் Σu_n ஒரு குவி தொடர்.

$x > e$ ஆனால் Σu_n ஒரு விரி தொடர்.

$x = e$ ஆனால், $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e}$.

$$\therefore \quad n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} = n \left\{ n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \log e \right\}$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left[n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} \right] = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} n \left[n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \dots \right) - 1 \right]$$

$$= -\frac{1}{2} < 1.$$

$\therefore$ Σu_n ஒரு விரி தொடராகும்.

3.22 மேற்கூறிய சோதனைகளின் சுருக்கமான விளக்கம் :

1. ஒப்பீட்டுச் சோதனை :

எல்லை $\frac{u_n}{v_n}$ ஒரு திட்டமான எண். Σv_n ஒரு குவி அல்லது விரி தொடரானால் Σu_n-ம் குவி அல்லது விரி தொடராகும்.

2. கோசியின் மூல சோதனை :

Σu_n என்ற தொடர்,

எல்லை $\lim_{n \to \infty} u_n^{1/n} < 1$ அல்லது > 1 என்றால் குவியும் அல்லது விரியும்.

3. டி ஆலம்பரின் சோதனை :

Σu_n என்ற தொடர்,

எல்லை $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1$ அல்லது < 1 என்றால், குவி தொடராகும் அல்லது விரி தொடராகும்.

4. ராபியின் சோதனை :

Σu_n என்ற தொடரில், எல்லை $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$ ஆனால் டி ஆலம்பரின் சோதனை பயன்படாது. அப்பொழுது எல்லை $\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1$ அல்லது < 1 ஆக இருக்கும்போது அத்தொடர் குவி தொடராகும் அல்லது விரி தொடராகும்.

5. டி மார்கான், பெர்டிரண்டின் சோதனை :

ஒரு தொடரின் தன்மையை அறிய ராபியின் சோதனை பயன் படாவிடில், அதாவது,

எல்லை $\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = 1$ என்று வருமாகில், நமக்கு டி மார்கான் சோதனையின்படி, Σu_n என்ற தொடர்,

எல்லை $\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1 \right] \log n > 1$ அல்லது < 1 என்ற மதிப்பிற்குக் குவியும் அல்லது விரியும்.

6. மடக்கைச் சோதனை :

Σu_n என்ற தொடர்,

எல்லை $\lim_{n \to \infty} \left(n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) > 1$ அல்லது < 1 என்ற மதிப்பிற்குக் குவியும் அல்லது விரியும்.

7. கோசியின் ஒடுக்கச் சோதனை :

$f(n)$ கூட்டு மதிப்புடையதும், ஓரியல்பான இறங்கும் தொடர் முறையும் ஆனல், $m > 1$ என்ற என்ற கூட்டு முழு எண்ணிற்கு,

$$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) + \ldots \ldots ;$$

$$mf(m) + m^2 f(m^2) + m^3 f(m^3) + \ldots + m^n f(m^n) + \ldots$$

என்ற இரண்டு தொடர்களும் குவியும் அல்லது விரியும்.

இதுவரை நாம் கூட்டெண்களின் தொடர்களின் தன்மையைப் பற்றிப் பார்த்தோம். இனி நாம் கூட்டெண்கள், குறையெண்கள் கலந்த தொடர்களின் குவிதல், விரிதல், அலேதல் தன்மைகளைப் பற்றிப் பார்ப்போம்.

3·23. அறக் குவிதல் (Absolute Convergence) :

ஒரு கூட்டு, குறை எண்கள் கலந்த தொடரின் உறுப்புகளின் மட்டு மதிப்புகளை எடுத்து ஒரு தொடர் அமைப்போமாகில் அத் தொடர் ஒரு குவி தொடராயிருப்பின், அக் கூட்டு, குறை எண் கலந்த தொடர் ஓர் அறக் குவியும் தொடர் (Absolutely convergent series) எனப்படும்,

$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ என்ற கந்தழித் தொடர் கூட்டு, குறை எண்கள் கொண்ட தொடராளுல், $|u_1|, |u_2|, |u_3|, \ldots$ என்பவைகளைக் கொண்டு ஒரு தொடர் $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots$ என்று அமைப்போமாளுல், அத் தொடர் ஒரு குவி தொடராளுல், $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ என்ற கலப்புத் தொடரை அறக் குவி தொடர் என்று அழைக்கிறோம்.

ஓர் அறக் குவியும் தொடரில் உள்ள உறுப்புகளை இடம் மாற்றி எழுதினுல், அப்படிப் பெறப்படும் தொடரும் ஒரு குவி தொடர் ஆகும்.

அறக் குவி தொடரின் எடுத்துக்காட்டு :

(i) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots \infty$ என்ற தொடரைக் கொண்டு

$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots \infty$ என்ற தொடரை அமைத்தால் இத் தொடர் ஒரு குவி தொடராகும். எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஓர் அறக் குவி தொடராகும்.

(ii) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots \infty$ என்ற தொடர் ஓர் அறக் குவி தொடராகும். ஏனெனில் $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \ldots \infty$ என்ற தொடர் ஒரு குவி தொடர்.

3·24. நிபந்தனைக் குவிதல் (Conditional convergence) :

கூட்டு, குறையெண்கள் கலந்த ஒரு கந்தழித் தொடர் அறக் குவி தொடர் இல்லாமலேயே குவியுமானல் அத் தொடர் நிபந்தனைக் குவி தொடர் என்று அழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots \infty$ என்ற தொடர் ஒரு குவி தொடராகும். ஆனல் $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \ldots \infty$ என்ற தொடர் ஒரு விரி தொடராகும். எனவே

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \infty$$

என்ற தொடர் ஒரு நிபந்தனைக் குவி தொடராகும்.

ஒரு நிபந்தனைக் குவி தொடரில் உள்ள உறுப்புகளை நமக்குத் தகுந்தபடி மாற்றி எழுதினல், அப்படிப் பெறப்படும் தொடர் $-\infty$ முதல் $+\infty$ வரை அலையும்படி எழுதலாம்.

தேற்றம் 4 :

ஓர் அறக் குவி தொடர் ஒரு குவி தொடராகும்.

தெரிப்பு :

Σu_n என்ற கலப்புத் தொடர் அறக் குவி தொடரானல் $\Sigma \mid u_n \mid$ ஒரு குவி தொடராகும். $\mid u_n \mid = v_n$ ஆனல், Σv_n ஒரு குவி தொடராகும். $\Sigma v_n = V$ எனக் கொள்க. ஒரு புதுத் தொடர் $\Sigma (u_n + v_n)$ என்பதை அமைத்தால், u_n ஒரு குறையெண்ணுயின், v_n கூட்டு எண். எனவே $w_n = u_n + v_n = 0$ ஆகும்.

u_n ஒரு குறை எண்ணுயின், v_n கூட்டு எண்.

$$w_n = u_n + v_n = 2v_n. \quad \therefore \quad 0 \leqslant w_n \leqslant 2v_n.$$

Σv_n ஒரு குவி தொடர். எனவே $\Sigma (u_n + v_n)$-ம் குவி தொடர்.

அதாவது Σw_n-ம் ஒரு குவி தொடராகும். $\Sigma w_n = W$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$
$$= (w_1 - v_1) + (w_2 - v_2) + \dots + (w_n - v_n).$$
$$= (w_1 + w_2 + \dots + w_n) - (v_1 + v_2 + \dots + v_n).$$

$$\therefore \quad U_n = W_n - V_n.$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} U_n = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} W_n - \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} V_n$$
$$= W - V.$$

$\therefore$ Σu_n = ஒரு திட்டமான எண்.

$\therefore$ Σu_n ஒரு குவி தொடராகும்.

3·25. தேற்றம் 5 :

ஒரு தொடரில் கூட்டு, குறை எண்கள் மாறி மாறி வந்து அந்த உறுப்புகளின் மட்டு மதிப்பு குறைந்து கொண்டே போய், n கந்தழி எல்லையை அடையும்போது, n ஆவது உறுப்பு பூச்சிய எல்லையை நெருங்குமாயின், அத்தொடர் ஒரு குவி தொடராகும்.

தெரிப்பு :

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots \dots$ என்ற தொடரை எடுத்துக் கொண்டால்,

$u_1, u_2, u_3 \dots \dots$ எல்லாம் கூட்டெண்கள்.

மேலும் $u_1 > u_2 > u_3 > \dots \dots > u_n > \dots \dots$

$U_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \dots \dots n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையானால்,

$$U_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

$$u_1 > u_2, \quad u_3 > u_4 \dots \dots u_{2n-1} > u_{2n}$$

$$\therefore \quad U_{2n} > 0.$$

$$U_{2n+2} = U_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) > U_{2n}$$

$\therefore$ U_{2n} ஓர் ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை.

மேலும் $U_{2n} = u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5) \dots (u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}$

$$u_2 > u_3,\ u_4 > u_5,\ \dots,\ u_{2n-2} > u_{2n-1}$$

$$\therefore\ U_{2n} < u_1$$

$\therefore\ 0 < U_{2n} < u_1$. ஆகையால் (U_{2n}), ஓர் ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறையானது, மேல் வரம்புடையதும் ஆகும்.

$\therefore$ $\lim\limits_{n \to \infty} U_{2n} = l$ என்று எடுத்துக்கொண்டால்

$$U_{2n+1} = U_{2n} + u_{2n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} U_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} U_{2n} = \lim_{n \to \infty} u_{2n+1}$$

$$= l + 0 = l.$$

n ஒற்றைப் படையாயினும், இரட்டைப் படையாயினும்

$$\lim_{n \to \infty} U_n = l.$$

$\therefore\ u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ ஒரு குவி தொடராகும்.

கிளைத் தேற்றம்: மேற்கூறிய தேற்றத்தில் (1) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l \neq 0$ ஆனால் அத்தொடர் அலை தொடராகும்.

தெளிப்பு :

$$\lim_{n \to \infty} U_{2n} = l \quad \text{(மேற்கூறிய தேற்றத்தின் மூலம்)}$$

$$\lim_{n \to \infty} U_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} (U_{2n} + u_{2n+1})$$

$$= l + k.$$

$\therefore\ u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ என்ற தொடர் அலை தொடராகும்.

(2) $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ என்ற தொடரில், n-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $u_{n+1} > u_n > 0$ ஆனால் அத்தொடர் அலை தொடராகும்.

தெரிப்பு :

$$0 < u_1 < u_2 < u_3 \ldots < u_n < \ldots$$

$$U_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n}) < 0.$$

$$U_{2n+1} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) \ldots - (u_{2n} - u_{2n+1}) > u_1.$$

n கந்தழி எல்லையை நெருங்கும்போது U_{2n}, U_{2n+1}-ம் ஒரே எல்லை l ஐ நெருங்க முடியாது. ஏனெனில் l ஒருங்கே பூச்சியத்திற்குக் குறைவாகவும், u_1-க்குப் பெரியதாகவும் இருக்க முடியாது.

$\therefore$ U_{2n}-ம் U_{2n+1}-ம் ஒருங்கே $+\infty$ அல்லது $-\infty$-க்கு நெருங்க முடியாது.

$\therefore$ $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$ என்ற தொடர் ஓர் அலை தொடராகும்.

3·26. தேற்றம் 6 :

Σu_n-ம் Σv_n-ம் அறக் குவி தொடர்களானால், அவைகளின் கூட்டுத் தொகை முறையே U, V ஆனால், அவ்விரண்டு தொடர்களைப் பெருக்கி வரும் தொடர்

$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \ldots$ ஓர் அறக்குவி தொடராகும். அதன் கூட்டுத் தொகை $U. V.$

தெரிப்பு : முதலாவதாக,

Σu_n-ம், Σv_n-ம் கூட்டு எண்கள் மட்டுமே கொண்ட தொடர்களாகும்.

$$U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \sum_1^n u_n$$

$$V_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = \sum_1^n v_n$$

$$S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n = \sum_{1}^{n} s_n$$

இங்கு $s_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots u_n v_1$ ஆகும்.

$$\begin{aligned}\therefore\ S_{2n} &= u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \dots \dots \\ &\quad + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_{n-1} v_2 + u_n v_1) + \dots \\ &\quad \dots + (u_1 v_{2n} + u_2 v_{2n+1} + \dots + u_n u_{n+1} + u_{n+1} u_n \\ &\quad + u_{2n} v_1) \\ &= u_1 (v_1 + v_2 + \dots + v_{2n}) + u_2 (v_1 + v_2 + \dots + v_{2n-1}) \\ &\quad + \dots + u_n (v_1 + v_2 + \dots + v_{n+1}) \\ &\quad + u_{n+1} (v_1 + v_2 + \dots v_n \\ &\quad + \dots + u_{2n} v_1 \\ &> (u_1 + u_2 + \dots + u_n)(v_1 + v_2 + \dots + v_n) = U_n V_n.\end{aligned}$$

மேலும்,

$$S_{2n} < (u_1 + u_2 + \dots + u_{2n})(v_1 + v_2 + \dots + v_{2n}) = U_{2n} V_{2n}$$

$$\therefore\ U_n V_n < S_{2n} < U_{2n} V_{2n}$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ U_n V_n = U \cdot V$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ U_{2n} V_{2n} = U \cdot V$$

$$\therefore\ \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ S_{2n} = U \cdot V \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

மேலும் $S_{2n+2} > S_{2n+1} > S_{2n}$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ S_{2n+2} = U \cdot V$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ S_{2n} = U \cdot V$$

$$\therefore\ \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ S_{2n+1} = U \cdot V \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

n ஒற்றைப்படை எண்ணாயினும் சரி, இரட்டைப்படை எண்ணாயினும் சரி, (1), (2)-லிருந்து,

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ S_n = UV$$

இரண்டாவதாக :

Σu_n-ம் Σv_n-ம் கலப்புத் தொடர் எனக் கொள்வோம்.

$$\sum_{1}^{\infty} | u_n | = U', \sum_{1}^{n} | u_n | = U'_n \text{ எனவும்,}$$

$$\sum_{1}^{\infty} | v_n | = V', \sum_{1}^{n} | v_n | = V_n' \text{ எனவும் கொள்வோம்.}$$

$$s_n' = | u_1 | \, | v_n | + | u_2 | \, | v_{n-1} | + \ldots + | u_{n-1} | \, | v_2 | + | u_n | \, | v_1 |$$

$$S_n' = \sum_{1}^{n} s_n' = s_1' + s_2' + s_3' + \ldots + s_n'$$

$$| s_n | = | u_1 v_1 + u_2 v_{n-1} + \ldots u_{n-1} v_2 + u_n v_1 |$$

$$\leqslant | u_1 | \, | v_n | + | u_2 | \, | v_{n-1} | + \ldots + | u_{n-1} | \, | v_2 | + | u_n | \, | u_1 |$$

$$\leqslant s_n'$$

முதலாவதாக $\sum_{1}^{n} s_n'$ ஒரு குவி தொடர், அதன் கூட்டுத் தொகை $U' V'$ எனப் பார்த்தோம்.

$\therefore \; \Sigma | S_n |$ ஒரு குவி தொடராகும்.

அதாவது ΣS_n ஓர் அறக் குவி தொடர்.

$$| U_n V_n - S_n | \leqslant | U_n' V_n' - S_n' |$$

ஏனெனில் $| U_n V_n - S_n |$ என்பது பல உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையின் மட்டுத் தொகை. $U_n' V_n' - S_n'$ என்பது அவ் வுறுப்புகளின் மட்டு மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகை.

$$\text{ஆனல் } \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} | U_n' V_n' - S_n' | = 0$$

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{n \to \infty} \; | U_n V_n - S_n | = 0.$$

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{n \to \infty} S_n = \text{எல்லை}_{n \to \infty} U_n V_n \; V = U.$$

3·27. வலுத் தொடர் (Power Series)

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ என்ற தொடரில் a_0, a_1, a_2 ... என்ற கெழுக்கள் x-ன் சார்பற்றவை (independent). எனவே அத்தொடர் x-ல் ஒரு வலுத் தொடர் எனப்படும்.

மேலே கூறிய தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் நமக்குப் பின்வரும் தேற்றம் கிடைக்கிறது.

$\Sigma a_n x^n$ என்ற வலுத் தொடர் $|x| < l$-க்கு ஓர் அறக் குவி தொடர், $\Sigma b_n x^n$ என்ற வலுத் தொடர் $|x| < m$-க்கு ஓர் அறக் குவி தொடர். இவைகளின் கூட்டுத் தொகை முறையே $f(x)$-ம், $\phi(x)$-ம் ஆகும். k ஆனது $l_1 m$ என்ற மதிப்புகளில் சிறியதான மதிப்பு என்றால்,

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \dots \infty$$

ஓர் அறக் குவி தொடராகும். அதன் கூட்டுத் தொகை $f(x) \, . \, \phi(x)$.

3·28. தேற்றம் 7 :

வலுத் தொடரின் முற்றொருமை : $|x| < l$-க்கு $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$;

$\sum_{0}^{\infty} b_n x^n$ என்ற இரு வலுத் தொடர்களும் குவி தொடர்கள். மேலும் அவைகளின் கூட்டுத் தொகைகள் சமமாக இருப்பின்,

$$a_0 = b_0 \, , \; a_1 = b_1 \, , \; a_2 = b_2 \, , \dots , a_n = b_n \, , \dots \text{ஆகும்.}$$

தெரிப்பு :

$|x| < l$-க்கு $\Sigma a_n x^n$, $\Sigma b_n x_n$ என்ற இரண்டு தொடர்களும் குவி தொடர்கள். மேலும்,

$$\Sigma a_n x^n = \Sigma b_n x^n.$$

$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\dots\dots$ ஒரு குவி தொடராகும், அதன் கூட்டுத் தொகை $|x|<l$-க்குப் பூச்சியமாகும்.

$x=0$ என ஈடு செய்வதால்,

$a_0-b_0=0$. $\therefore\ a_0=b_0$. மேலும் $|x|<l$ ஆனால்

$(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\dots\dots=0$. இது $x\neq 0$ என்ற மதிப்புகளுக்கு உண்மையாதலின், x ஆல் இரு பக்கங்களையும் வகுத்தால்,

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)x+(a_3-b_3)x^2+\dots\dots=0.$$

ஏனெனில் $(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\dots\infty$ என்ற தொடர் $|x|<l$-க்குக் குவி தொடர். ஆகையால் $|x|<l$-க்கு,

$(a_2-b_2)+(a_3-b_3)x+\dots\infty$-ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

$\therefore\ |x|<l$-க்கு $(a_2-b_2)+(a_3-b_3)x+\dots\dots<K$ (ஒரு திட்டமான எண்).

$|x|<l,\ x\neq 0$-க்கு,

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)x+(a_3-b_3)x^2+\dots=0.$$

$$\therefore\ (a_1-b_1)=-x[(a_2-b_2)+(a_3-b_3)x+\dots]$$

$$\therefore\ |a_1-b_1|=|x|\ |(a_2-b_2)+(a_3-b_3)x+\dots|<|x|\ |K|$$

ϵ எவ்வளவு சிறியதாகக் கொடுக்கப்பட்டாலும், $x\neq 0$-க்கு $x<\frac{\epsilon}{K}$ என்ற மதிப்பிற்கு $|a_1-b_1|<\epsilon$.

a_1, b_1 என்பவை மாறிலிகள். அதே போல் $a_2=b_2$, $a_3=b_3, \dots, a_n=b_n, \dots\dots$

3·29. ஈருறுப்புக் கந்தழித் தொடர் (Binomial Series)

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3+\dots\dots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{\lfloor r}\cdot x^r+\dots\dots\infty$$

என்ற தொடர் ஈருறுப்புத் தொடர் எனப்படும். 'n' ஒரு கூட்டு முழு எண்ணுயின் அத்தொடர் ஒரு கந்தழித் தொடராகாது. $(n+1)$ உறுப்புகளே கிடைக்கும் என்பதை முதல் பகுதியில் பார்த்தோம். ஆகையால் இங்கு n ஒரு விகிதமுறு எண்ணுகும். எனவே n நேர் முழு எண்ணுக இராவிடில் அத்தொடர் கந்தழித் தொடராகும். அப்போது, அது குவிகிறதா, விரிகிறதா அல்லது அலைகிறதா என்பதைப் பார்ப்போம்.

$$1+\frac{n}{\underline{|1}}x+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2+\dots+\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)x^r}{\underline{|r}}$$

$+\dots\infty$ என்ற தொடர் ஒரு கலப்புத் தொடராகும். ஏனெனில் n, x-ன் மதிப்புகளுக்கு, இத்தொடரின் உறுப்புகள் கூட்டு குறை மதிப்புகளைப் பெறும்.

$$u_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{\underline{|r}}\cdot x^r$$

$$u_r=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)}{\underline{|r-1}}\cdot x^{r-1}$$

$$\therefore\quad \frac{u_{r+1}}{u_r}=\frac{n-r+1}{r}\cdot x$$

$$\therefore\quad \left|\frac{u_{r+1}}{u_r}\right|=\left|\frac{n-r+1}{r}\cdot x\right|$$

$$=\left|\frac{n-r+1}{r}\right|\cdot|x|$$

$$=\left|\frac{n+1}{r}-1\right|\cdot|x|$$

$$\therefore\quad \underset{r\to\infty}{\text{எல்லை}}\left|\frac{u_{r+1}}{u_r}\right|=|-1|\cdot|x|$$

ஏனெனில் $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{n+1}{r}=0.$

$$\therefore\quad \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\left|\frac{u_{r+1}}{u_r}\right|=|x| \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore \quad |x| < 1$ ஆனுல் அத்தொடர் அறக் குவி தொடர். எனவே ஒரு குவி தொடராகும்.

$|x| > 1$ ஆனுல் அத்தொடர் குவியாது.

3·30. படிக்குறித் தொடர் (Exponential Series)

$$1 + \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{\underline{|n}} + \ldots \infty$$

என்ற தொடர் படிக்குறித் தொடர் எனப்படும். x கூட்டு எண்ணுயின் எல்லா உறுப்புகளும் கூட்டல் குறி பெற்று இருக்கும். x ஒரு குறை எண் ஆனுல் ஒன்று விட்ட உறுப்புகள் கூட்டு, குறை மதிப்பைப் பெறும்.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^n}{\underline{|n}} \div \frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}}$$

$$= \frac{x^n}{\underline{|n}} \cdot \frac{\underline{|n-1}}{x^{n-1}} = \frac{x}{n}$$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x}{n}\right|$$

$$\therefore \quad \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left|\frac{x}{n}\right|$$

$$= 0 < 1.$$

எனவே x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{x^n}{\underline{|n}}$ என்ற தொடர் ஓர் அறக் குவி தொடர். எனவே குவி தொடராகும்.

3·31. மடக்கைத் தொடர் (Logarithmic Series):

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \ldots$$

என்ற தொடர் மடக்கைத் தொடர் எனப்படும்.

x கூட்டெண்ணுயின் ஒன்று விட்ட உறுப்புகள் கூட்டு, குறை மதிப்புகளைப் பெறும். x குறை எண்ணுயின் எல்லா உறுப்புகளும் குறை மதிப்பைப் பெறும்.

$$u_{n+1} = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$u_n = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n}$$

$$= -\frac{n}{n+1} x$$

$$\therefore \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|-\frac{n}{n+1} \cdot x\right|$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot |x|$$

$$\therefore \quad \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \text{எல்லை } |x| \cdot \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{n}{n+1}$$

$$= |x|.$$

$\therefore$ $|x| < 1$ **ஆனல் மடக்கைத் தொடர் குவிகிறது.**

$|x| > 1$ **ஆனல் குவியாது.**

$x = -1$ ஆனல், அத்தொடர் $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots \ldots \infty$ என வரும்.

$\therefore$ $-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \ldots \infty\right)$ என்பது விரி தொடராகும்.

$x = 1$ ஆனல், $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots \infty$ என்பது குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 29 :

$\Sigma v_n = u_1 - \frac{1}{2}(u_1+u_2) + \frac{1}{3}(u_1+u_2+u_3) - \ldots$ என்ற கந்தழித் தொடரில், $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots u_n > \ldots$ ஆனல், n கந்தழி எல்லையை நெருங்கும்போது u_n பூச்சியத்தை நெருங்கினல், அத் தொடர் குவி தொடர் என நிறுவுக.

$$\Sigma v_n = u_1 - \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3) \ \cdots$$

$= v_1 - v_2 + v_3 - \ldots$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்

$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n)$ ஆகும்.

எல்லை $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$u_1 > u_2 > u_3 \cdots > u_n > \cdots$$

$$u_n < u_1$$

$$u_n < u_2$$

$$\cdots \cdots \cdots$$

$$\cdots \cdots \cdots$$

$$u_n < u_{n-1}$$

எனவே, $(n-1)u_n < u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1}$

$$U_n = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n}{n}; \quad U_{n-1} = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}}{(n-1)}$$

$$\therefore \ U_n - U_{n-1} = \left(\frac{u_1 + u_2 + u_3 \cdots u_n}{u}\right) - \left(\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}}{n-1}\right)$$

$$= \frac{n u_n - (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)}{n(n-1)}$$

(1) $\therefore \ V_n - V_{n-1} < \frac{u_n}{n(n-1)}$ (எல்லை $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$)

$$< 0.$$

(2) எல்லை $\lim_{n \to \infty} V_n =$ எல்லை $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{\infty} u_n = 0.$

எனவே (தேற்றம் 5-ன் மூலம்) கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒரு குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 30 :

$\frac{x}{1+x} - \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^3} - \dots \dots \infty$ $(0 < x < 1)$ என்ற தொடரின் குவி/விரி தன்மையை அறிக. (செ.ப.)

$\frac{x}{1+x} - \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^3} - \dots\dots \infty$ என்ற தொடரை $u_1 - u_2 + u_3 - \dots \dots \infty$ என்று எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\therefore \quad u_n = \frac{x^n}{1+x^n} > 0. \quad \text{ஏனெனில் } 0 < x < 1$$

$$\therefore \quad u_n - u_{n+1} = \frac{x^n}{1+x^n} - \frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} = \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}$$

$$> 0. \quad \text{ஏனெனில் } x < 1$$

$\therefore$ $u_n > u_{n+1}$ (எல்லா n மதிப்புகளுக்கும்)

மேலும் $\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0.$

$\therefore$ தேற்றம் 5-ன்படி கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒரு குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 31 :

$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \dots \infty$ இத்தொடரின் குவி/விரி தன்மையை அறிக.

இத்தொடரை $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ என்போம்.

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \cdot \frac{2}{3} < 1$$

$\therefore \quad u_{n+1} < u_n.$

$\therefore \quad u_n > u_{n+1}$

மேலும், $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ u_n = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$= 0.$$

எனவே, தேற்றம் 5 மூலம், கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் உறுப்புகளின் மட்டு மதிப்பு குறைந்து கொண்டே போய் n கந்தழியை அடையும் போது, n ஆவது உறுப்பு பூச்சியத்தை நெருங்குகிறது. $\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒரு குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 32 :

$$1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.4} + \dots \infty$$

என்ற தொடர் குவி தொடரா அல்லது விரி தொடரா ?

$S_{2n} = 2n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை எனக் கொண்டால்,

$$S_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$= \left(\sum_{1}^{n} u_n\right) - \left(\sum_{1}^{n} v_n\right)$$

$\sum_{1}^{n} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ என்பது ஒரு விரி தொடராகும். (சோதனை 3-ன் படி $p = 1$)

$$\sum_{1}^{n} v_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}\,.$$

$$\therefore \sum \frac{1}{n(n+1)} < \sum \frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ ஒரு குவி தொடராகும்.

எனவே $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum v_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

$$\therefore S_{2n} = \sum_{1}^{n} u_n - \sum_{1}^{n} v_n$$

= (ஒரு விரி தொடர்) − (ஒரு குவி தொடர்)

$\therefore$ எல்லை $\underset{n\to\infty}{} S_{2n} = \infty.$

மேலும், எல்லை $\underset{n\to\infty}{} S_{2n+1} = \infty.$

ஏனெனில், $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{(n+1)}$

எனவே n ஒற்றைபடை எண்ணாயினும் சரி அல்லது இரட்டை படை எண்ணாயினும் சரி, எல்லை $\underset{n\to\infty}{} S_n = \infty$

ஆகையால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர் ஒரு விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 33 :

$1 - x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} \dots \infty$-இத் தொடரின் குவி/விரி தன்மையை அறிக.

$$1 - x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} \dots = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

... ... என்று எடுத்துக் கொண்டால்

$$u_0 = 1,\ u_1 = -x,\ u_2 = \frac{x^2}{2^2} \dots \dots \dots$$

$$\therefore \quad u_n = (-1)^n \frac{x^n}{n^2};\ u_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{(-1)^n \ x^n}\right|$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)^2} \ |x|$$

$$= \frac{n^2}{n^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \ |x| = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \ |x|.$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \ \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \ |x|$$

$$= |x|.$$

$|x| < 1$ ஆனால் அத்தொடர் ஓர் அறக் குவி தொடர். எனவே குவி தொடராகும்.

$|x| > 1$ ஆனால் $|u_n| = \frac{|x|^n}{n^2}$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \ |u_n| = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \ \frac{|x|^n}{n^2}$$

$$= \infty.$$

எனவே $|x| > 1$ க்குக் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒரு விரி தொடர் அல்லது அலை தொடர்.

$x = -1$ ஆனால் $\Sigma \frac{1}{n^2}$ ஒரு குவி தொடர்.

$x = \pm 1$ ஆனால் $\Sigma \frac{(-1)^n}{n^2}$ ஒரு குவி தொடர்.

$\therefore$ $x = \pm 1$ ஆனால் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒரு குவி தொடர்.

எடுத்துக்காட்டு 34 :

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{\sqrt{n}}$ என்ற கந்தழித் தொடரின் குவி/விரி தன்மையை அறிக.

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot x^n$$

$$u_{n+1} = \frac{(-1)^n \, x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(-1)^{n-1} \cdot x^n}$$

$$= \frac{(-1) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \cdot x$$

$$\therefore \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x|.$$

$\therefore$ $|x| < 1$ ஆனால் Σu_n ஓர் அறக் குவி தொடர். எனவே ஒரு குவி தொடராகும்.

$$|x| > 1 \text{ ஆனால் } |u_n| = \frac{|x|^n}{\sqrt{n}}.$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \; |u_n| = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{|x|^n}{\sqrt{n}}$$

$$= \infty.$$

$\therefore\ \ \Sigma u_n$ ஒரு விரி தொடர்.

$x = 1$ ஆனால்

$$\Sigma u_n = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$ என்பது ஒரு குவி தொடர்.

$x = -1$ ஆனால்

$$\Sigma u_n = -\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$ என்பது ஒரு விரி தொடர்.

எடுத்துக்காட்டு 35 :

$$1 - \frac{x}{1+a} + \frac{x^2}{1+2a} - \dots + \frac{(-1)^n x^n}{1+na} + \dots$$

என்ற தொடர் குவி தொடரா அல்லது விரி தொடரா என்று அறிக.

$$u_{n+1} = \frac{(-1)^n x^n}{1+na}$$

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{1+(n-1)a}$$

$$\therefore\ \ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^n x^n}{1+na} \cdot \frac{1+(n-1)a}{(-1)^{n-1} \cdot x^{n-1}}$$

$$= -\frac{1+(n-1)a}{1+na} \cdot x$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| .$$

$\therefore\ \ |x| < 1$ ஆனால் Σu_n ஓர் அறக்குவி தொடர்; எனவே குவி தொடராகும்.

$|x| > 1$ ஆனால் $\Sigma |u_n|$ ஒரு விரி தொடராகும்.

$x = 1$ ஆனால்,

$$1 - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+3a} + \dots$$

என்ற தொடரில்,

$$\frac{1}{1+a} > \frac{1}{1+2a} > \frac{1}{1+3a} \cdots$$

$\therefore \; u_n > u_{n+1}$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \; u_n = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \; \frac{1}{1+(n-1)a} = 0.$$

$\therefore \; x = 1$ என்ற மதிப்பிற்கு Σu_n ஒரு குவி தொடராகும். $x = -1$ என்ற மதிப்பிற்கு, கொடுத்துள்ள தொடர்

$$1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2a+1} + \ldots \text{ ஆகும்.}$$

இது விரி தொடர் என்பதை $\sum \frac{1}{n}$ உடன் ஒப்பிட்டு அறியலாம்.

பயிற்சி 3 (b)

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் தொடர்களின் குவி/விரி/அலை தன்மையை அறிக :

1. $\sum \sqrt{\dfrac{5^{n+1}}{3^n + 4^n}}$

2. $\sum \dfrac{x^n}{n^2 + n}$

3. $\Sigma n^{100} x^n$

4. $\sum \dfrac{n}{(n+1)^p}$

5. $\sum \dfrac{1}{1+n^2 x^n}$

6. $\sum \left(\dfrac{x^n}{\underline{|n}} \right)^2$

7. $\sum \dfrac{n^2}{n^3+1} \cdot x^{n-1}$

8. $\sum \dfrac{n^p}{\underline{|n}}$

9. $\sum \dfrac{x^n}{\underline{|n}}$

10. $\sum (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n} \sqrt{n}$

11. $\sum \dfrac{x^n}{(n+1)(n+2)}$

12. $\sum \dfrac{n\, x^n}{(n+1)(n+2)}$

13. $\sum_{1}^{\infty} x^n \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$

14. $\sum \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$

15. $\sum \dfrac{15n^5 + 11n^4}{6n^{12} + 14} x^n$

16. $\sum \dfrac{x^n}{n^2 + 1}$

17. $\Sigma (-1)^{n+1}\, n x^{n-1}$

18. $\sum \dfrac{x^n}{(2n+1)(2n+2)}$

19. $\sum \dfrac{1}{n(1+2^{-n})}$

20. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n^2 - x^2}}$

21. $\sum \dfrac{1}{1 + 3x^4}$

22. $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$

23. $\Sigma \sqrt{n^4 + n} - n^2)$

24. $\sum \left\{ \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^p} \right.$

25. $\sum \dfrac{(n+2)(n+3)}{n(n+1)} x^n$

26. $\sum \dfrac{n^2}{n^3 + 1} x^{n-1}$

27. $\sum \dfrac{(-1)^n \cdot n}{2n^2 + 3}$

28. $\Sigma (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

29. $\sum \dfrac{n^3}{2^n + 1}$

30. $\sum \dfrac{x^{2n-2}}{(n+1)\sqrt{n}}$

3 (b). ஈருறுப்புத் தேற்றம், படிக்குறித் தேற்றம், மடக்கைத் தேற்றம்—இவற்றின் தெரிப்புகள்

(Proof for the Binomial, Exponential and Logarithmic Theorems)

நாம் முதல் பகுதியில் இம்மூன்று தொடர்களின் சில தன்மைகளையும், அவற்றின் மூலம் சில தொடர்களின் கூடுதல்களைக் காணும் முறைகளைப் பற்றியும் பார்த்தோம். ஆனல் அவைகளைத் தெரிப்பின்றி எடுத்துக்கொண்டு மேற் கூறியவைகளை இரண்டாவது, மூன்ருவது, நான்காவது அத்தியாயங்களில் பார்த்தோம். இப்பொழுது அத் தொடர்களின் தெரிப்புகளைப் பார்போம்.

ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம் (விகிதமுறு எண்களுக்கு) :

அறிமுகம் :

கந்தழித் தொடர்களில் குவிதல் தன்மை பற்றி ஓரளவு நாம் முன் அத்தியாயங்களில் தெரிந்து கொண்டோம். இனி இவ்வத்தியாயத்தில் ஒருவகைக் கந்தழித் தொடர்களின் தொகைகளைக் காண ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றத்தை எடுத்துக் கூறி மெய்ப்பாடு செய்வோம். இத் தேற்றம் இயற் கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றங்களில் ஒன்ருக விளங்குவதாகும். இந் தேற்றத்தின் தெரிப்பிற்கு அடிப்படையாய் விளங்கும் 'வான்டர்மான்டி'ன் தேற்றத்தையும் மெய்ப்பாடு செய்வோம்.

குறியீடு :

நாம் $n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$ என்ற பெருக்கத்தை n_r எனக் கொள்வோம். ஈண்டு 'n' என்பது எந்த எண்ணையாகிலும் குறிக்கலாம். 'r' என்பது ஒரு நேர் முழு எண்ணைக் குறிக்கும்.

$\therefore \ \frac{n_r}{r!}$ என்பதை $\binom{n}{r}$ எனக் குறிப்போம்.

கவனிக்க :

$n\,C_r = \binom{n}{r}$, n ஒரு நேர் முழு எண்ணுயிருப்பின்.

1. வான்டர்மாண்டின் தேற்றம் :

"p, q என்ற இரு எண்கள் எவ்வெண்களாய் இருப்பினும்

$$(p+q)_r = p_r + \binom{r}{1} p_{r-1}\, q_1 + \binom{r}{2} p_{r-2}\, q_2 + \cdots$$

$$\cdots + \binom{r}{s} p_{r-s}\, q_s + \cdots + q_r\text{"}$$

சுருங்க, $(p+q)_r = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{r}{s} p_{r-s}\, q_s$

ஈண்டு 'r' ஒரு நேர் முழு எண்.

மெய்ப்பாடு (தொகுத்தறி முறை) :

'r'-ன் 'm' என்ற மதிப்பிற்கு மேற் கூறிய தேற்றம் உண்மை எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \ (p+q)_m = p_m + \binom{m}{1} p_{m-1}\, q_1 + \binom{m}{2} p_{m-2}\, q_2 + \cdots$$

$$\cdots + \binom{m}{s} p_{m-s}\, q_s + \cdots + q_m.$$

$$\therefore \ (p+q)_{m+1} = (p+q)_m\,(p+q-m)$$

$$= \left[p_m + \binom{m}{1} p_{m-1}\, q_1 + \binom{m}{2} p_{m-2}\, q_2 + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \binom{m}{s} p_{m-s}\, q_s + \cdots + q_m \right] (p+q-m)$$

$$= p_m\,(\overline{p-m}+q) + \binom{m}{1} p_{m-1}\, q_1\,(\overline{p-m+1} + \overline{q-1})$$

$$+ \binom{m}{2} p_{m-2}\, q_2\,(\overline{p-m+2} + \overline{q-2}) + \cdots$$

$$+\binom{m}{s-1} p_{m-s+1}\, q_{s-1}\, (\overline{p-m+s-1} + \overline{q-s+1})$$

$$+\binom{m}{s} p_{m-s}\, q_s\, (\overline{p-m+s} + \overline{q-s}) + \dots + q_m\, (p+\overline{q-m})$$

$$= p_m(p-m) + \left\{ p_m\, q + \binom{m}{1} p_{m-1}\, q_1\, (p-m+1) \right\}$$

$$+ \left\{ \binom{m}{1} p_{m-1} \cdot q_1\, (q-1) + \binom{m}{2} p_{m-2}\, q_2\, (p-m+2) \right\}$$

$$+ \dots \dots + \left\{ \binom{m}{s-1} p_{m-s+1}\, q_{s-1}\, (q-s+1) \right.$$

$$\left. + \binom{m}{s} p_{m-s}\, q_s\, (p-m+s) \right\} + \dots \dots + q_m(q-m)$$

$$= p_{m+1} + p_m\, q_1 \left\{ 1 + \binom{m}{1} \right\}$$

$$+ p_{m-1}\, q_2 \left\{ \binom{m}{1} + \binom{m}{2} \right\} + \dots\dots$$

$$+ p_{m-s+1}\, q_s \left\{ \binom{m}{s-1} + \binom{m}{s} \right\} + \dots + q_{m+1}$$

$$= p_{m+1} + p_m\, q_1 \binom{m+1}{1} + p_{m-1}\, q_2 \binom{m+1}{2} + \dots\dots$$

$$+ p_{m-s+1} \binom{m+1}{s} + \dots + q_{m+1}$$

[n_r-ன் வரையறையின்படி]

$$= p_{m+1} + p_m\, q_1 \binom{m+1}{1} + p_{m-1}\, q_2 \binom{m+1}{2} + \dots$$

$$+ p_{m-s+1}\, q_s \binom{m+1}{s} + \dots\dots + q_{m+1}$$

$$\left[\because \binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right]$$

எனவே r-ன் m என்ற மதிப்பிற்கு இத்தேற்றம் உண்மையாய் இருப்பின் r-ன் $m+1$ என்ற மதிப்பிற்கும் உண்மையாய் இருக்கின்றது.

$$(p+q)_1 = p+q = p_1 + q_1$$
$$(p+q)_2 = (p+q)(p+q-1) = p(p-1) + pq + q(q-1) + pq$$
$$= p_2 + 2pq + q_2 = p_2 + \binom{2}{1} p_1 q_1 + q_2.$$

எனவே நாம் கண்ட கூற்றுப்படி, $r=3$ என்ற மதிப்பிற்கு இத் தேற்றம் உண்மையாய் இருக்கும். $r=3$ என்ற மதிப்பிற்கு உண்மையாய் இருப்பதால் $r=4$ என்ற மதிப்பிற்கும் உண்மையாய் இருக்க வேண்டும். இங்ஙனம் ஒவ்வொரு நிலையிலும் உண்மை யறிந்து சென்றால் r-ன் பொதுவான கூட்டு முழுப் படிக்கு இத் தேற்றம் உண்மை என்பது தெளிவாகின்றது.

ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம் :

'n' என்பது ஏதாவதொரு விகிதமுறு எண்ணுயின்

$$1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{r} x^r + \ldots \infty$$

என்ற தொடரானது $|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $(1+x)$-ன் கூட்டு மெய் மதிப்பிற்குச் சமம்.

தெரிப்பு :

$$f(n) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^r \text{ என்க.}$$

p, q என்ற இரு எண்களை எடுத்துக் கொள்வோம்,

$$\therefore\ f(p) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{p}{r} x^r \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$f(q) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{q}{r} x^r \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

மேலும் $f(p+q) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{p+q}{r} x^r \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

(1), (2), (3)-இம் மூன்றுத் தொடர்களும் $|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அறவே குவியும் என்பதை நிரூபித்துள்ளோம். இரு அறக்குவி தொடர்களின் பெருக்கற் பலனுல் கிடைக்கும் தொடர் ஓர் அறக்குவி தொடராகும். மேலும் அத்தொடரின் மதிப்பு எடுத்துக்கொண்ட இரு தொடர்களின் மதிப்புகளின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமம் என்ற தேற்றத்தின்படி,

(1), (2)—இவ்விரு தொடர்களின் பெருக்கலால் கிடைக்கும் தொடர் $f(p) \times f(q)$ என்பதற்குச் சமம்.

(1), (2) – இவைகளின் பெருக்கற் பலன்

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \binom{p}{r} + \binom{p}{r-1}\binom{q}{1} + \cdots + \binom{p}{r-s}\binom{q}{s} + \cdots + \binom{q}{s} \right\} x^r$$

என்பதாகும்.

எனவே,

$$f(p) \times f(q) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \binom{p}{r} + \binom{p}{r-1}\binom{q}{1} + \cdots + \binom{p}{r-s}\binom{q}{s} + \cdots + \binom{q}{s} \right\} x^r$$

ஆனல் வாண்டர்மாண்டின் தேற்றப்படி,

$$(p+q)_r = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} p_{r-s}\, q_s$$

$$\therefore \binom{p+q}{r} = \frac{(p+q)_r}{r!} = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \frac{p_{r-s}\, q_s}{r!}$$

$$= \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \binom{p}{r-s} \binom{q}{s} \times \frac{(r-s)!\ s!}{r!}$$

$$= \sum_{s=0}^{r} \binom{p}{r-s} \binom{q}{s}$$

$$\therefore\ f(p) \times f(q) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \binom{p+q}{r} x^r$$

$$= f(p+q)$$

[(8) உடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்குமிடத்து]

இதையொட்டி,

$$f(p+q+r+s \dots) = f(p) \times f(q) \times f(r) \times f(s) \times \dots$$

என்பதைக் காணலாம்.

$$f(n) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \binom{n}{r} x^r$$

$$\therefore\ f(1) = 1 + x.$$

(i) n ஒரு நேர் முழு எண்ணுயிருப்பின்,

$n = 1 + 1 + \dots n$ முறை

$\therefore\ f(n) = f(1 + 1 + \dots n$ முறை$) = f(1) \times f(1) \times \dots n$ முறை

$[\because\ f(p+q+\dots) = f(p) \times f(q) \times \dots]$

எனவே, $f(n) = [f(1)]^n = (1+x)^n$.

$\therefore$ n ஒரு நேர் முழு எண்ணுயின்,

$$(1+x)^n = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \binom{n}{r} x^r.$$

(ii) n ஒரு நேர் விகிதமுறு எண்ணாயிருப்பின்,

$n = \frac{p}{q}$ என்க. ஈண்டு p, q என்பவை நேர் முழு எண்கள் (விகிதமுறு எண்களின் விதிப்படி).

$$\therefore \; f\left(\frac{p}{q}\right) \times f\left(\frac{p}{q}\right) \times \ldots \; q \text{ முறை}$$

$$= f\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \ldots \; b \text{முறை}\right)$$

$$= f\left(\frac{p}{q} \times q\right) = f(p)$$

$$\therefore \; \left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = f(p) = (1+x)^p$$

[∵ 'p' ஒரு கூட்டு முழு எண்]

இருபுறமும் q மூலம் எடுக்க,

$f\left(\frac{p}{q}\right)$ என்பது $(1+x)^{p-q}$-ன் கூட்டு மெய் மதிப்பிற்குச் சமம்.

$$\therefore \; f(n) = (1+x)^n$$

(iii) n ஒரு குறை எண்ணாயிருப்பின் :

$n = -m$ என்க. ஈண்டு m என்பது ஒரு கூட்டு எண்.

எனவே, $f(0) = f(m-m)$

$$= f(m) \times f(-m)$$

ஆனல், $f(0) = 1$

$$\therefore \; f(-m) = \frac{1}{f(m)} = \frac{1}{(1+x)^m}$$

$$= (1+x)^{-m}$$

$$\therefore \; f(n) = (1+x)^n$$

எனவே (i), (ii), (iii) ஆகிய இம்மூன்று உண்மைகளை ஒன்று சேர்த்துக் கீழ்கண்ட முடிவினை உணரலாம் :

'n' ஒரு விகிதமுறு எண்ணுயிருப்பின்

$$1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots \text{ என்ற தொடர் } |x| < 1$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் $(1+x)^n$ என்பதன் கூட்டு மெய் மதிப்பிற்குச் சமம்.

குறிப்பு : நிலே (ii)-ல் $(1+x)^{p/q}$-ன் q மதிப்புகள் குறை எண்களாகவும், கற்பனை எண்களாகவும் கூட இருக்கலாம். ஆனல், $f\left(\frac{p}{q}\right)$ ஒரு கூட்டு மெய்யெண். எனவே. $f\left(\frac{p}{q}\right)$ ஆனது $(1+x)^{p-q}$-ன் கூட்டு மெய் மதிப்பிற்குச் சமம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1\cdot 4}{4.8} + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12} + \dots$$

என்ற தொடரின் தொகை காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் கூட்டுத் தொகையை S என்று குறிப்பிடுக.

$$\therefore\ S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1\cdot 4}{4.8} + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12} + \dots$$

இதை,

$$(1-x)^{-p/q} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{p(p+q)(p+2q)\dots(p+\overline{r-1}q)}{\underline{|r}} \left(\frac{x}{q}\right)^r$$

என்ற வடிவத்திற்குக் கொண்டு வருவோம்.

$$\therefore\ S = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1.4}{1.2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$$

$$\therefore\ \left.\begin{array}{r} p = 1 \\ p+q = 4 \end{array}\right\} ;\ \frac{x}{q} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore\ q = 3,\quad x = \frac{3}{4}$$

எனவே,

$$S = \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}}.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\frac{3}{18} + \frac{3.7}{18.24} + \frac{3.7.11}{18.24.30} + \cdots$$

என்ற தொடரின் தொகை காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் கூட்டுத் தொகையை S என்று குறிக்க.

$$\therefore \quad S = \frac{3}{18} + \frac{3.7}{18.24} + \frac{3.7.11}{18.24.30} + \cdots$$

$$= \frac{3}{3.6} + \frac{3.7}{3.4}\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{3.7.11}{3.4.5}\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \cdots$$

இத்தொடர் நமக்கு வேண்டிய வடிவத்தில் இல்லை. பெருக்கியும், கூட்டியும் இதை விரும்பிய வடிவில் கொணருவோம்.

$$\frac{S}{1.2} = \frac{3}{1.2.3}\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{3.7}{1.2.3\cdot4}\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{3.7.11}{1.2.3\cdot4\cdot5}\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{3}{3!}\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{3.7}{4!}\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{3.7.11}{5!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \cdots$$

$$\therefore \quad \frac{S}{1\cdot2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{3}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \frac{3.7}{4!}\left(\frac{1}{6}\right)^4 + \frac{3.7.11}{5!}\left(\frac{1}{6}\right)^5 + \cdots$$

(அதாவது)

$$\frac{S}{72} = \frac{3}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \frac{3.7}{4!}\left(\frac{1}{6}\right)^4 + \frac{3.7.11}{5!}\left(\frac{1}{6}\right)^5 + \cdots$$

(அதாவது)

$$\frac{S}{72} \times (-5)(-1) = \frac{(-5)(-1) \cdot 3}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \frac{(-5)(-1) \cdot 3 \cdot 7}{4!}\left(\frac{1}{6}\right)^4 + \ldots$$

(அதாவது)

$$\frac{5S}{72} + 1 + \frac{(-5)}{1!}\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{(-5)(-1)}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{(-5)(-1)(3)}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \ldots$$

வலப் பக்கத்தில் உள்ள தொடரை இப்பொழுது

$$(1-x)^{-p/q} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{p(p+q)(p+2q)\ldots(p+\overline{r-1}q)}{r!}\left(\frac{x}{q}\right)^r$$

என் பதோடு ஒப்பிட்டுப் பார்க்கலாம்.

அங்ஙனம் பார்க்கின்,

$$\left.\begin{aligned} p &= -5 \\ p+q &= -1 \end{aligned}\right\}; \quad \frac{x}{q} = \frac{1}{6}.$$

$$\therefore \quad q = 4, \quad x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad \frac{5S}{72} = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-\left(\frac{-5}{4}\right)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{4}}$$

$$\therefore \quad S = \frac{72}{5}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{4}} - 1 + \frac{5}{6} - \frac{5}{72}\right]$$

$$1 - \frac{5}{6} + \frac{5}{72}$$

எனவே கொடுக்கப்பட்டத் தொடரின் கூட்டுத் தொகை $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{4}}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\frac{1}{24} - \frac{1\cdot 3}{24\cdot 32} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{24\cdot 32\cdot 40} - \ldots$$

என்ற தொடரின் தொகை காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் கூட்டுத் தொகையை S என்க.

எனவே,

$$S = \frac{1}{24} - \frac{1\cdot 3}{24\cdot 32} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{24\cdot 32\cdot 40} - \ldots$$

இத் தொடரில் உள்ள உறுப்புகள் ஒன்றுவிட்டு ஒன்று மாற்றுக் குறியீடு பெற்று வருவதைக் கவனிக்க. எனவே நாம் (3) ஆம் பிரிவில் உள்ள $(1+x)^{-p/q}$-ன் விரிவத்தோடு இத் தொடரை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க வேண்டும்.

இப்பொழுது,

$$S = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} - \frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{1}{8}\right)^3 + \ldots$$

இது நமக்கு வேண்டிய வடிவத்தில் இல்லை. நமக்கு வேண்டிய வடிவிற்கு நமக்குத் தெரிந்த முறைகளால் இதைக் கொணருவோம்.

எனவே,

$$\frac{S}{1\cdot 2} = \frac{1}{3\,!}\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1\cdot 3}{4\,!}\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{5\,!}\left(\frac{1}{8}\right)^3 + \ldots$$

அதாவது

$$\frac{S}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{3\,!}\left(\frac{1}{8}\right)^3 - \frac{1\cdot 3}{4\,!}\left(\frac{1}{8}\right)^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{5\,!}\left(\frac{1}{8}\right)^5 + \ldots$$

அதாவது $\frac{S}{128} = \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{8}\right)^3 - \frac{1.3}{4!}\left(\frac{1}{8}\right)^4 + \frac{1.3.5}{5!}\left(\frac{1}{8}\right)^5 \ldots\ldots$

$$-\frac{S}{128}=-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{8}\right)^3+\frac{1.3}{4!}\left(\frac{1}{8}\right)^4-\ldots\ldots$$

$$\therefore\quad -\frac{S}{128}\times(-3)(-1)=-\frac{(-3)(-1)(1)}{3!}\left(\frac{1}{8}\right)^3$$

$$+\frac{(-3)(-1)(1)(3)}{4!}\left(\frac{1}{8}\right)^4-\ldots$$

$$\therefore\quad -\frac{3}{128}S+1-\frac{(-3)}{1!}\left(\frac{1}{8}\right)+\frac{(-3)(-1)}{2!}\left(\frac{1}{8}\right)^2$$

$$=1-\frac{(-3)}{1!}\left(\frac{1}{8}\right)+\frac{(-3)(-1)}{2!}\left(\frac{1}{8}\right)^2$$

$$-\frac{(-3)(-1)(1)}{3!}\left(\frac{1}{8}\right)^3+\ldots\ldots$$

இப்பொழுது நாம் வலப் பக்கத்திலிருக்கும் தொடரை $(1+x)^{-p/q}$ என்பதன் விரிவத்தோடு ஒப்பிடலாம்.

ஒப்பிட்டுப் பார்க்கின்,

$$\left.\begin{aligned} p&=-3\\ p+q&=(-1)\\ \frac{x}{q}&=\frac{1}{8}\end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned}&\therefore\ q=2\\ &\therefore\ x=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

எனவே

$$-\frac{3S}{128}+1+\frac{3}{8}+\frac{3}{128}=\left(1+\frac{1}{4}\right)^{-\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore\quad S=-\frac{128}{3}\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1-\frac{3}{8}-\frac{3}{128}\right]$$

$$=-\frac{128}{3}\left[\frac{5}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{-48-128-3}{128}\right]$$

$$= -\frac{128}{3}\left[\frac{5\sqrt{5}}{8}-\frac{179}{128}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\ (179-80\sqrt{5})$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் கூட்டுத்தொகை

$\frac{1}{3}\,(179-80\sqrt{5})$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$1-\frac{1^2}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1.3^2}{2.4}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1.3.5^2}{2.4.6}\,\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots$$

என்ற தொடரின் தொகை காண்க.

கொடுக்கப்பட்டத் தொடரின் தொகையை S என்க.

$$\therefore\quad S=1-\frac{1^2}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1.3^2}{2.4}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1.3.5^2}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots$$

$$=1-\frac{1^2}{1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1.3^2}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$-\frac{1.3.5^2}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^6+\ldots\ldots$$

$$=1-\frac{1}{1!}\,[2-1]\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1.3}{2!}\,[2.2-1]\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$-\frac{1.3.5}{3!}\,(2.3-1)\left(\frac{1}{2}\right)^6+\ldots\ldots$$

$$=1-\frac{2}{1!}\left(\frac{1}{2}\right)\quad+\frac{1.3.2.2}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$-\frac{1.3.5.2.3}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^6+\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$+\frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^6-\ldots\ldots$$

$$= 1-2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1.3}{1!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1.3.5}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \ldots\right]$$

$$+\left[\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \ldots\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + 2\left[\frac{3}{1!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{3.5}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \ldots\right]$$

$$-\left[-\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times 2\left[\frac{3}{1!}\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3.5}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$-\left[1 - \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots\right] + 1$$

$$= \frac{7}{4} - \frac{1}{4} \times 2\left[-\frac{3}{1!}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{3.5}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \ldots\right]$$

$$-\left[1 - \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= \frac{7}{4} - \frac{1}{4} \times 2\left[1 - \frac{3}{1!}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{3.5}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \ldots\right]$$

$$+ \frac{1}{4} - \left[1 - \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= 2 - \frac{1}{4} \times 2\left[1 - \frac{3}{1!}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{3.5}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \ldots\right]$$

$$-\left[1 - \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \ldots\right]$$

$$= 2 - \frac{1}{4} \times 2\,S_1 - S_2.$$

ஈண்டு $S_1 = 1 - \frac{3}{1!}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{3.5}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \quad \dots \qquad (a)$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \quad \dots \qquad (b)$$

(a)-ன் வலக்கைப் புறத்தில் உள்ள தொடரை $(1+x)^{-p/q}$ ன் விரிவத்தோடு ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்போது

$$p = 3$$

$$p + q = 5$$

$$\frac{x}{q} = \frac{1}{4} \qquad \therefore \ q = 2, \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \ S_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

இதுபோலவே (b)-ன் வலப் புறத்தை ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்

$$\left.\begin{aligned} p &= 1 \\ p + q &= 3 \\ \frac{x}{q} &= \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} ; \quad \begin{aligned} q &= 2 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

எனவே, $S_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\therefore \ S = 2 - \frac{2}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2 - \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} + 1\right]$$

$$= 2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1\right]$$

$$= 2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{4}{3}\right]$$

$$= 2 - \frac{4\sqrt{6}}{9}.$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் கூட்டுத் தொகை $\frac{2 - 4\sqrt{6}}{9}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$(2-x+x^2)^{\frac{1}{3}}$ ஐ x-ன் அடுக்கங்களில் விரித்தெழுதுக.

$$
\begin{aligned}
(2-x+x^2)^{\frac{1}{3}} &= 2^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 + \frac{x}{2}(x-1) \right\}^{\frac{1}{3}} \\
&= 2^{\frac{1}{3}} \left[1 + \frac{1}{3}\,\frac{x}{2}\,(x-1) \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\,\frac{x^2}{4}(x-1)^2 + \dots \right] \\
&= 2^{\frac{1}{3}} \left[1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{6} - \frac{x^2}{36} + \dots \right] \\
&= 2^{\frac{1}{3}} \left[1 - \frac{x}{6} + \frac{5x^2}{36} + \dots \dots \right]
\end{aligned}
$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots)^2$-ன் விரிவத்தில் x^r-ன் கெழு $\frac{1}{6}(r+1)(r+2)(r+3)$ என்று காட்டுக.

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \dots = (1-x)^{-2}$$

எனவே,

$$
\begin{aligned}
(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \dots)^2 &= (1-x)^{-4} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \right\} x
\end{aligned}
$$

எனவே,

$(1+2x+3x^2+4x^3+ \dots)^2$-ன் விரிவத்தில் x^r-ன் கெழு

$$= \frac{1}{6}(r+1)(r+2)(r+3) \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$\frac{1}{(1-2x)(1-3x)}$ என்ற சார்பினை x-ன் அடுக்குகளில் விரித்தெழுதுக.

$$\frac{1}{(1-2x)(1-3x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-3x}$$

$$\therefore \quad A = \frac{1}{1-\frac{3}{2}} \quad \& \quad B = \frac{1}{1-\frac{2}{3}}$$

$$A = -2 \quad \& \quad B = 3$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(1-2x)(1-3x)} = -\frac{2}{1-2x} + \frac{3}{1-3x}$$

$$= -2(1-2x)^{-1} + 3(1-3x)^{-1}$$

$$= -2\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n\right]$$

$$+ 3\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n\right]$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [3^{n+1} - 2^{n+1}]x^n$$

$(1-2x)^{-1}$ ஐ ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் கூற்றுப்படி $|2x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்தான் விரிக்க முடியும்.

இதைப் போலவே $(1-3x)^{-1}$ ஐ $|3x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்தான் விரிக்க முடியும்.

எனவே, $|x| < \frac{1}{2}$, $|x| < \frac{1}{3}$ என்று x இருந்தால் $(1-2x)^{-1}$ ஐயும் $(1-3x)^{-1}$ ஐயும் ஈருறுப்புத் தேற்றப்படி விரிக்கலாம்.

$|x| < \frac{1}{2}$ என்ற கட்டுப்பாடு, $|x| < \frac{1}{3}$ என்று இருக்கும் போது கட்டுப்படுகின்றது. ஆனால் $|x| < \frac{1}{3}$ என்ற கட்டுப்பாடு $|x| < \frac{1}{2}$ என்று இருக்கும்போது இராது. எனவே, $|x| < \frac{1}{3}$ என்று இருக்கும்போது $\frac{1}{1-2x}$ ஐயும், $\frac{1}{1-3x}$ ஐயும் விரித்தெழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$\frac{2-3x}{1-3x+2x^2}$ ஐ விரித்தெழுதி x^n-ன் கெழுவினைக் காண்க.

$$\frac{2-3x}{1-3x+2x^2} = \frac{2-3x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x}$$
(பகுதிப் பின்னப்படி)

$$= (1+x+x^2+\dots) + (1+(2x) + (2x)^2 + \dots)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1+2^n)\, x^n.$$

எனவே x^n-ன் கெழு $1+2^n$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$ ஐ x-ன் அடுக்கங்களில் விரித்தெழுதுக.

x, $|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் இருக்கின்றது.

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{1+x-(1-x)}$$

$$= \frac{1}{2x}\{1+x+(1-x) - 2\sqrt{1-x^2}\}$$

$$= \frac{1}{2x}\{2 - 2\sqrt{1-x^2}\}$$

$$= \frac{1}{x}\{1-\sqrt{1-x^2}\}$$

$$= \frac{1}{x}\left[1-\left\{1-\binom{\frac{1}{2}}{1}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^4-\binom{\frac{1}{2}}{3}x^6+\dots\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^4+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^6-\dots\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{x^4}{8}+\frac{3}{24}x^6+\dots\right]$$

$$= \frac{x}{2}+\frac{x^3}{8}+\frac{3x^5}{24}+$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

'n' $4r$ அல்லது $4r+1$ என்று இருக்கும்போது $\frac{1}{1-x+x^2-x^3}$-ன் விரிவத்தில் x^n-ன் கெழு 1 என்று காண்க. மேலும் 'n', $4r+2$ அல்லது $4r+3$ என்று இருக்கும்போது $\frac{1}{1-x+x^2-x^3}$-ன் விரிவத்தில் x^n-ன் கெழு 0 என்று நிருபிக்க.

$$\frac{1}{1-x+x^2-x^3} = \frac{1+x}{1-x^4} = (1+x)\sum_{r=0}^{\infty} x^{4r}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} x^{4r} + \sum_{r=0}^{\infty} x^{4r+1}$$

எனவே 'n', $4r$ அல்லது $4r+1$ ஆக இருக்கும் போது x^n-ன் கெழு 1 என்பதைக் கண்டு கொள்ளலாம். ஆனல், 'n' $4r+3$ ஆக இருக்கும்போது நாம் கண்ட விரிவத்தில் x^n உறுப்பு இல்லாமையை நோக்கலாம். எனவே 'n', $4r+2$ அல்லது $4r+3$ ஆக இருக்கும் போது x^n-ன் கெழு '0' ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$\frac{a+bx+cx^2}{(1-x)^3}$-ன் விரிவத்தில் x^n-ன் கெழு n^2+1 என்று இருக்க a, b, c என்ற எண்களின் மதிப்பை அறிக.

$$\frac{a+bx+cx^2}{(1-x)^3} = (a+bx+cx^2)(1-x)^{-3}$$

$$= (a+bx+cx^2) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)(r+2)}{1\cdot 2} x^r$$

$$= a \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)(r+2)}{1\cdot 2} x^r + b \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)(r+2)}{1\cdot 2} x^{r+1}$$

$$+ c \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)(r+2)}{1\cdot 2} x^{r+2}$$

x^0-ன் கெழு $= a+0$

x^1-ன் கெழு $= a\,\dfrac{2\cdot 3}{1\cdot 2} + b\,\dfrac{1\cdot 2}{1\cdot 2}$

x^2-ன் கெழு $= a\,\dfrac{3\cdot 4}{1\cdot 2} + b\,\dfrac{2\cdot 3}{1\cdot 2} + c\,\dfrac{1\cdot 2}{1\cdot 2}$

ஆனால் x^n-ன் கெழு n^2+1 என்று இருக்க வேண்டும்.

ஆதலால் x^0-ன் கெழு 1 என்று இருக்க வேண்டும்.

x^1-ன் கெழு 2 என்று இருக்க வேண்டும்.

x^2-ன் கெழு 5 என்று இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} a &= 1 \\ 3a+b &= 2 \\ 6a+3b+c &= 5 \end{aligned}\right\} \quad \therefore \quad \begin{aligned} b &= -1 \\ c &= 5+3-6 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{எனவே} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

என இருக்க வேண்டும்.

சமபடிப் பெருக்கங்கள் (Homogeneous product)

a, b என்ற எண்களைக் கொண்டு நாம்

a^3, a^2b, ab^2, b^3 என்ற முப்படிப் பெருக்கங்கள்,

$a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, a^4$ என்ற நாற்படிப் பெருக்கங்கள்,

... ...

... ...

$a^r\ a^{r-1}b,\ a^{r-2}b^2,\ \dots\ \dots\ ab^{r-1},\ b^r$ என்ற r சமபடிப் பெருக்கங்களை அமைக்கலாம்.

$a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, a^4$ என்பவைகள் a, b என்ற இரண்டு எண்களைக்கொண்டு அமைக்கப்பட்ட நாற்படிப் பெருக்கங்கள் என்று குறிப்பிட ${}_2H_4$ என்று எழுதுகிறோம். இதன் எண்ணிக்கை **5 ஆகும். எனவே,**

$${}_2H_4 = 5 \text{ என எழுதலாம்.}$$

பொதுவாக, n இராசிகளைக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட r சமபடிப் பெருக்கங்களின் எண்ணிக்கை ${}_nH_r$ ஆகும்.

தேற்றம் :

n இராசிகளைக் கொண்டு அமைக்கக் கூடிய r சமபடிப் பெருக்கங்களின் எண்ணிக்கை,

$${}_nH_r = \frac{n(n+1)\ (n+2)\ \dots\ \dots\ (n+r-1)}{\underline{|r}} \text{ ஆகும்.}$$

தெரிப்பு :

$a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ என்ற n இராசிகளை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$(1 + a_1 x + a_1^2 x^2 + \dots \dots)(1 + a_2 x + a_2^2 x^2 + \dots) \dots (1 + a_n x + a_n^2 x^2 + \dots \dots)$$

$\equiv 1 + S_1 x + S_2 x^2 + \dots + S_r x^r + \dots$ என எழுதலாம். இங்கு $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ என்ற n இராசிகளைக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட r சமபடிப் பெருக்கங்களின் கூட்டுத்தொகையை S_r என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

$a_1 = a_2 = a_3 \ldots = a_n = 1$ என ஈடு செய்வதால் S_r-ல் n உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை நமக்குக் கிடைக்கும். அதாவது ${}_nH_r$-ன் மதிப்புக் கிடைக்கும்.

$$\therefore \; (1 + x + x^2 + \ldots)(1+x+x^2+\ldots)(1+x+x^2+\ldots) \ldots \ldots (1 + x + x^2 + \ldots) \; [n \text{ முறைகள்}].$$

$$= 1 + {}_nH_1 \, x + {}_nH_2 \, x^2 + \ldots + {}_nH_r \, x^r + \ldots \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore \; {}_nH_r = (1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^n$-ல் உள்ள x^r-ன் கெழுவாகும்.

அதாவது ${}_nH_r = [(1-x)^{-1}]^n$-ல் உள்ள x^r-ன் கெழுவாகும்.

$= (1-x)^{-n}$-ல் உள்ள x^r-ன் கெழுவாகும்.

$$= \left[1 + nx + \frac{n(n+1)}{\underline{|2}} x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{\underline{|3}} x^3 + \ldots + \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{\underline{|r}} x^r + \ldots \right]$$

-ல் x^r-ன் கெழுவாகும்.

$$\therefore \; {}_nH_r = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{\underline{|r}}$$

$$= \frac{\underline{|n+r-1}}{\underline{|r} \cdot \underline{|n-1}} = {}^{n+r-1}C_r$$

எடுத்துக்காட்டு :

நான்கு தாயக் கட்டைகளில் ஒவ்வொன்றின் ஆறு முகங்களிலும் (0, 1, 2, 3, 4, 5) என்ற எண்கள் பொறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவைகளை ஒரே சமயத்தில் உருட்டினால் எத்தனை விதங்களில் மொத்தம் 15 கிடைக்கும் ?

நான்கு கட்டைகளும் காட்டும் எண்கள் $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என எடுத்துக்கொண்டால், $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 15$ என்ற சமன்பாடு எத்தனை விதங்களில் பொருந்துமோ அத்தனை விதங்களில் 15 கூட்டுத் தொகையாகக் கிடைக்கும்.

எனவே சமபடிப் பெருக்கல்களின் தேற்றத்தின்படி, நாம், $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$

$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$ என்ற நான்கு கோவைகளின் பெருக்குத் தொகையில் x^{15}-ன் கெழுவைக் காணவேண்டும்.

$\therefore \quad (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4$-ல் x^{15}-ன் கெழு.

$= \left(\dfrac{1-x^6}{1-x}\right)^4$-ல் x^{15}-ன் கெழு

$= (1-x^6)^4\,(1-x)^{-4}$-ல் x^{15}-ன் கெழு.

$= (1-4x^6+6x^{12}-4x^{18}+x^{24})(1+4x$

$+\dfrac{4.5}{1.2}x^2+\dfrac{4.5.6}{1.2.3}x^3+\dfrac{5.6.7}{1.2.3}x^4+\ldots\ldots$

$+\dfrac{10.11.12}{1.2.3}x^9+\ldots+\dfrac{16.17.18}{1.2.3}x^{15}$

$+\ldots\ldots)$-ல் x^{15}-ன் கெழு.

$=\dfrac{16.17.18}{1.2.3}-4\,.\,\dfrac{10.11.12}{1.2.3}+6\,.\,\dfrac{4.5.6}{1.2.3}$

$= 816-880+120$

$= 56.$

படிக்குறித்தேற்றம் (The Exponentional Theorem)

தேற்றம் 1 :

x ஏதாவது ஒரு மெய்யெண்ணாக இருப்பின் $x \neq 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக்கிணங்க,

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x = 1+\frac{x}{\underline{|1}}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\ldots\ldots\infty.$$

தேர்ப்பு :

n மிகப் பெரியதாக இருப்பின், $\left|\dfrac{x}{n}\right| < 1$-க்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் மூலம்,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{\underline{|1}}\cdot\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \dots \dots$$

$$= 1 + \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\underline{|2}}\cdot x^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}\, x^3 + \dots$$

$$\therefore \text{ எல்லை}_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \text{எல்லை}_{n\to\infty}\left[1+\frac{x}{\underline{|1}} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\underline{|2}}\, x^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}\cdot x^3 + \dots \infty\right]$$

$$= 1 + \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \dots \infty$$

$= e^x$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

$x = 1$ ஆனால்,

$$\text{எல்லை}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \dots \dots \infty = e.$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \dots \infty$$

என்ற தொடரையே நாம் படிக்குறித் தொடர் என்று அழைக்கிறோம்.

தேற்றம் 2 :

படிக்குறித் தேற்றம்.

x-ன் எல்லா விகிதமுறு மெய்யெண் மதிப்புகளுக்கு $e^x = 1 + \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \dots \infty$ என்பதே படிக்குறித் தேற்றமாகும்.

தேரிப்பு :

$$f(m) = 1 + \frac{m}{\lfloor 1} + \frac{m^2}{\lfloor 2} + \dots + \frac{m^r}{\lfloor r} + \dots \dots \infty.$$

$$f(n) = 1 + \frac{n}{\lfloor 1} + \frac{n^2}{\lfloor 2} + \dots + \frac{n^r}{\lfloor r} + \dots \dots \infty.$$

$$f(m+n) = 1 + \frac{(m+n)}{\lfloor 1} + \frac{(m+n)^2}{\lfloor 2} + \dots + \frac{(m+n)^r}{\lfloor r} + \dots \infty$$

இத்தொடர்கள் m, n-ன் மெய்யெண் மதிப்புகளுக்கு அறவும் குவித் தொடர்களாகும்.

$f(m)$, $f(n)$- இவ்விரண்டு தொடர்களின் பெருக்கல் பலனைக் காண்போம்.

$$f(m) \times f(n) =$$

$$\left[1 + \frac{m}{\lfloor 1} + \frac{m^2}{\lfloor 2} + \dots + \frac{m^r}{\lfloor r} + \dots \infty\right]$$

$$\times \left[1 + \frac{n}{\lfloor 1} + \frac{n^2}{\lfloor 2} + \dots + \frac{n^r}{\lfloor r} + \dots \infty\right]$$

$$\therefore\ f(m) \times f(n) =$$

$$1 + \left[\frac{m}{\lfloor 1} + \frac{n}{\lfloor 1}\right] + \left[\frac{m^2}{\lfloor 2} + \frac{m}{\lfloor 1} \cdot \frac{n}{\lfloor 1} + \frac{n^2}{\lfloor 2}\right]$$

$$+ \dots\dots + \left[\frac{m^r}{\lfloor r} + \frac{m^{r-1}}{\lfloor r-1} \cdot \frac{n}{\lfloor 1} + \frac{m^{r-2}}{\lfloor r-2} \cdot \frac{n^2}{\lfloor 2}\right.$$

$$\left. + \dots \frac{n^r}{\lfloor r}\right] + \dots$$

இத்தொடரும் ஓர் அறவும் குவித்தொடர் என்பதைக்கீழ்த் தொடர் குவிதலும் விரிதலும் என்ற அத்தியாயத்தில் பார்த்தோம்.

$(r+1)$ ஆவது உறுப்பு =

$$\left[\frac{m^r}{\lfloor r} + \frac{m^{r-1}}{\lfloor r-1} \cdot \frac{n}{\lfloor 1} + \frac{m^{r-2}}{\lfloor r-2} \cdot \frac{n^2}{\lfloor 2} + \dots + \frac{n^r}{\lfloor r}\right]$$

$$= \frac{1}{\underline{|r}} [m^r + {}^rC_1 m^{r-1} n + {}^rC_2 m^{r-2} n^2 + \dots + n^r].$$

$$= \frac{1}{\underline{|r}} (m+n)^r$$

$= f(m+n)$-ன் $(r+1)$ ஆவது உறுப்பு.

எனவே $f(m) \times f(n)$-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் $f(m+n)$-ல் சமமாகும்.

$$\therefore \quad f(m) \times f(n) = f(m+n).$$

அதேபோல் $f(m) \times f(n) \times f(l) = f(m+n+l)$

... ...

... ...

$$\therefore \quad f(m) \times f(n) \times f(l) \dots\dots = f(m+n+l+ \dots\dots)$$

(i) x ஒரு கூட்டு முழு எண்.

$m = n = l = \dots\dots = 1$ என்றால்

$f(m) \, . \, f(n) \, . \, f(l)$ .. x உறுப்புகள் வரை $= f(m+n+l \dots)$ அதாவது $f(1) \times f(1) \times f(1) \dots = f(1+1+1+ \dots x$ தடவைகள்).

$$\therefore \quad [f(1)]^x = f(x).$$

$$\therefore \quad e^x = 1 + \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \dots \dots \infty$$

(ii) x ஒரு குறை முழு எண்.

$x = -p$ என்றால் p ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாக இருக்கும்.

$$\therefore \quad f(p) \times f(-p) = f(p-p) = f(0) = 1.$$

$$\therefore \quad f(-p) = \frac{1}{f(p)} = \frac{1}{e^p} = e^{-p}$$

$$\therefore \quad f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \dots \infty.$$

(iii) x ஒரு விகிதமுறு கூட்டு அல்லது குறை எண்.

$x = \frac{p}{q}$; (p கூட்டு அல்லது குறை முழு எண். q கூட்டு முழு எண்).

$$\therefore\ f\left(\frac{p}{q}\right) \times f\left(\frac{p}{q}\right) \times f\left(\frac{p}{q}\right) \ldots q \text{ உறுப்புகள்}$$

$$= f\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \frac{p}{q} \ldots q \text{ தடவைகள்}\right)$$

$$\therefore\ \left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = f\left(\frac{p}{q} \times q\right) = f(p).$$

$$\therefore\ \left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = e^p.$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = [e^p]^{1/q} = e^{p/q}$$

$$\therefore\ f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \ldots \infty$$

படிக்குறி 'e'-ன் எல்லை :

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

நிலை i: n ஒரு கூட்டு எண்ணுக இருக்கட்டும்.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{\lfloor n} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{\lfloor 3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{1}{\lfloor n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots\ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

n கூட்டெண். எனவே $(n+1)$ உறுப்புகள் உள்ளன. மேலும் n-ன் மதிப்பு அதிகரிக்க அதிகரிக்க உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையும், அவற்றின் மதிப்பும் மூன்ருவது உறுப்பிலிருந்து அதிகரிக்கிறது.

எனவே $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ -ம் அதிகரிக்கும். ஒவ்வோர் உறுப்பும் கூட்டு மதிப்புடையவை.

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ஐ $1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\ldots+\frac{1}{\underline{|n}}$

என்ற தொடருடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\ldots+\frac{1}{\underline{|n}}$$

$$\therefore \left(1+\frac{1}{n}\right) < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\therefore \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 3.$$

$$\therefore \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \text{ஒரு திட்டமான எண்ணுகும்} = e$$

என்று ஒப்பிடுகிறோம்.

நிலை ii: n ஒரு கூட்டு பின்னம், எனவே $p < n < p+1$ எனக் காண்போம்.

$$\frac{1}{p+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{p}.$$

$$\therefore 1+\frac{1}{p+1} < 1+\frac{1}{n} < 1+\frac{1}{p}.$$

$$\therefore \left(1+\frac{1}{p+1}\right)^p < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1};$$

$n\to\infty$ ஆனால் $p, p+1 \to \infty$.

$$\underset{p\to\infty}{\text{எல்லை}} \left(1+\frac{1}{p+1}\right)^p = \frac{\underset{p\to\infty}{\text{எல்லை}} \left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+1}}{\underset{p\to\infty}{\text{எல்லை}} \left(1+\frac{1}{p+1}\right)} = e$$

$$\therefore \underset{p \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1} = \underset{p \to \infty}{\text{எல்லை}} \left[\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p}\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right]$$

$$= \underset{p \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p} \cdot \underset{p \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

$$= e \cdot 1 \text{ (நிலை i-ன் மூலம்).}$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

நிலை iii : n ஒரு குறை எண். $n = -m$ என்று கொள்வோம். m கூட்டு எண்.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-m}$$

$$= \left(\frac{m-1}{m}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{m-1}{m}\right)^{m}} = \left(\frac{m}{m-1}\right)^{m}$$

$$= \left[1 + \frac{1}{m-1}\right]^{m}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m} \times \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)$$

$n \to \infty$ எனில் $m - 1 \to \infty$.

$$\therefore \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \underset{(m-1) \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1}$$

$$\times \underset{(m-1) \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)$$

$$= e \cdot 1 \quad [\because \text{ நிலை i, ii மூலம்}]$$

n-ன் எல்லா மதிப்புக்கும் $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$ ஆகும்.

அதிபரவளைச் சார்புகள் (Hyperbolic functions) :

$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ என்ற சார்பை $\cos h\, x$ என்றும் $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ என்ற சார்பை $\sin h\, x$ என்றும் குறிப்பிடுகிறோம். இந்தச் சார்புகள் அதிபரவளைச் சார்புகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

$$\tan h\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ ஆகும்.}$$

ஒரு கந்தழித் தொடரில் $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \frac{x^n}{\underline{|n}}$ என்று கொடுக்கப்பட்டு, நமக்கு n ஆவது உறுப்பு மட்டும் தெரியுமாகில் அத் தொடரின் கூட்டுத் தொகை காணல் :

$$f(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n(n-1) + \dots \dots \dots + a_r n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$$

என்பது r படியுள்ள n-ன் கோவையாகும். இதில் $a_0, a_1, a_2 \dots \dots \dots a_r$. என்பவைகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$\begin{aligned} n \text{ ஆவது உறுப்பு} &= f(n) \frac{x^n}{\underline{|n}} \\ &= [a_0 + a_1 n + a_2 n(n-1) + a_3 n(n-1)(n-2) \\ &\quad + \dots + a_r n(n-1) \dots (n-r+1)] \frac{x^n}{\underline{|n}} \\ &= a_0 \frac{x^n}{\underline{|n}} + a_1 x \cdot \frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}} + a_2 x^2 \cdot \frac{x^{n-2}}{\underline{|n-2}} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=0}^{n=\infty} f(n) \frac{x^n}{\underline{|n}} &= a_0 \sum \frac{x^n}{\underline{|n}} + a_1 x \sum \frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}} \\ &\quad + a_2 x^2 \sum \frac{x^{n-2}}{\underline{|n-2}} + \dots \dots \dots \\ &\quad + a_r x^r \sum \frac{x^{n-r}}{\underline{|n-r}} \end{aligned}$$

$$= a_0 e^x + a_1 x \cdot e^x + a_2 x^2 e^x + \dots + a_r x^r e^x$$

$$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_r x^r)\, e^x$$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\frac{1^2 \cdot 2^2}{|\underline{1}} + \frac{2^2 \cdot 3^2}{|\underline{2}} + \frac{3^2 \cdot 4^2}{|\underline{3}} + \dots\dots \infty$$ என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் கண்டுபிடி.

$t_n = n$ ஆவது உறுப்பு $= \dfrac{n^2 (n+1)^2}{|\underline{n}} = \dfrac{n(n+1)^2}{|\underline{n-1}}$

$$\therefore \quad \frac{n(n+1)^2}{|\underline{n-1}} = \frac{A}{|\underline{n-1}} + \frac{B}{|\underline{n-2}} + \frac{C}{|\underline{n-3}} + \frac{D}{|\underline{n-4}}$$ ஆனால்,

$$n(n+1)^2 = A + B(n-1) + C(n-1)(n-2) + D(n-1)(n-2)(n-3)$$

இதன் தீர்வு $A = 4, \quad B = 14, \quad C = 8, \quad D = 1.$

$$\therefore \quad t_n = \frac{4}{|\underline{n-1}} + \frac{14}{|\underline{n-2}} + \frac{8}{|\underline{n-3}} + \frac{1}{|\underline{n-4}}$$

$$\therefore \quad t_1 = 4$$

$$t_2 = \frac{4}{|\underline{1}} + 14$$

$$t_3 = \frac{4}{|\underline{2}} + \frac{14}{|\underline{1}} + 8$$

$$t_4 = \frac{4}{|\underline{3}} + \frac{14}{|\underline{2}} + \frac{8}{|\underline{1}} + 1$$

$$t_5 = \frac{4}{|\underline{4}} + \frac{14}{|\underline{3}} + \frac{8}{|\underline{2}} + \frac{1}{|\underline{1}}$$

... ...

... ...

$$\therefore\ S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 4\left(1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\dots\dots\right)+14\left(1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\dots\right)+8\left(1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\dots\right)+\left(1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\dots\dots\right)$$

$$= 4e+14e+8e+e$$

$$= 27e.$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

$1.5+\frac{2.6}{\underline{|1}}+\frac{3.7}{\underline{|2}}+\dots\dots\ \infty$-ன் கூட்டுத்தொகை காண்க.

$t_{n+1} = (n+1)$ ஆவது உறுப்பு $= \frac{(n+1)(n+5)}{\underline{|n}}$

$$\therefore\ \frac{(n+1)(n+5)}{\underline{|n}} = \frac{A}{\underline{|n}}+\frac{B}{\underline{|n-1}}+\frac{C}{\underline{|n-2}}$$

$(n+1)(n+5) = A+Bn+Cn(n-1)$ ஆகும்.

இதன் தீர்வு $A=5,\ B=7,\ C=1$. எனவே,

$$t_{n+1} = \frac{5}{\underline{|n}}+\frac{7}{\underline{|n-1}}+\frac{1}{\underline{|n-2}}$$

$$\therefore\ t_1 = 5$$

$$t_2 = \frac{5}{\underline{|1}}+7$$

$$t_3 = \frac{5}{\underline{|2}}+\frac{7}{\underline{|1}}+1$$

$$t_4 = \frac{5}{\lfloor 3} + \frac{7}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 1}$$

... ...

... ...

$$\therefore\ S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} t_{n+1} = 5\left(1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \ldots\ldots\right)$$
$$+ 7\left(1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \ldots\right)$$
$$+ \left(1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \ldots\right)$$
$$= 5e + 7e + e$$
$$= 13e.$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

n மிகப் பெரியதாக இருப்பின்,

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2}\right)$ (தோராயமாக) என நிறுவுக.

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$ ஆகும்.

$$\therefore\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$
$$= e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} \cdots\right)}$$
$$= e^{1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \cdots}$$
$$= e \cdot e^{-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \cdots}$$

$$= e\left[1 + \frac{\left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} \cdots\right)}{\underline{|1}} + \frac{\left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} \cdots\right)^2}{\underline{|2}} + \ldots\right]$$

$$= e\left[1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2}\right] \text{(தோராயமாக)}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$n^{n+1} - n(n-1)^{n+1} + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}(n-2)^{n+1} - \ldots (n+1) \text{ உறுப்புகள்}$$

$$= \frac{n}{2}\ \underline{|(n+1)} \text{ என்று காட்டுக.}$$

$$\text{இடக்கைப் புறம்} = \underline{|n+1}\left[e^{nx} - n \cdot e^{(n-1)x} + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} e^{(n-2)x} + \ldots (n+1) \text{ உறுப்புகள்}\right]$$

என்ற விரிவில் x^{n+1}-ன் கெழுவாகும்.

$$= \underline{|n+1}\ e^{nx}[1 - {}^nC_1 e^{-x} + {}^nC_2 e^{-2x} - \ldots + (n+1) \text{ உறுப்புகள்}]$$

என்ற விரிவில் x^{n+1}-ன் கெழுவாகும்.

$$= \underline{|n+1}\left[1 + \frac{nx}{\underline{|1}} + \frac{n^2x^2}{\underline{|2}} + \ldots\right] \times \left[\frac{x}{\underline{|1}} - \frac{x^2}{\underline{|2}} \ldots\right]^n$$

என்ற விரிவில் x^{n+1}-ன் கெழுவாகும்.

$$= \underline{|n+1}\left(1 + \frac{nx}{\underline{|1}} + \frac{n^2x^2}{\underline{|2}} \ldots\right) \times x^n\left(1 - \frac{x}{\underline{|2}} \ldots\right)$$

என்ற விரிவில் x^{n+1}-ன் கெழு.

$$= \underline{|n+1}\left(\frac{n}{\underline{|1}} - \frac{n}{\underline{|2}}\right) = \frac{n}{2}\ \underline{|n+1}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot x^n}{\underline{|n}} = (1 + 3x + x^2)\, e^x \text{ என்று காட்டுக.}$$

$$\frac{(n+1)^2}{\underline{|n}} = \frac{A}{\underline{|n}} + \frac{B}{\underline{|n-1}} + \frac{C}{\underline{|n-2}}$$

$$\therefore \quad (n+1)^2 = A + Bn + C(n-1).$$

இதன் தீர்வு கண்டால்,

$$A = 1, \; B = 3, \; C = 1$$

$$\therefore \quad \frac{(n+1)^2}{\underline{|n}} = \frac{1}{\underline{|n}} + \frac{3}{\underline{|n-1}} + \frac{1}{\underline{|n-2}}$$

$$t_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{\underline{|n}} \cdot x^n = \frac{1}{\underline{|n}}\, x^n + \frac{3}{\underline{|n-1}}\, x^n + \frac{1}{\underline{|n-2}}\, x^n$$

$$\therefore \quad t_{n+1} = \frac{x^n}{\underline{|n}} + 3x\, \frac{n^{n-1}}{\underline{|n-1}} + x^2\, \frac{x^{n-2}}{\underline{|n-2}}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{\underline{|n}}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} t_{n+1}$$

$$= \sum \frac{x^n}{\underline{|n}} + 3x \sum \frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}} + x^2 \sum \frac{x^{n-2}}{\underline{|n-2}}$$

$$= e^x + 3x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$$

$$= e^x\,(1 + 3x + x^2)$$

மடக்கைத் தொடர் (Logarithmic series)

மடக்கைத் தேற்றம் : $-1 < x < 1$ என்றால்

$$\log_e (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\, \frac{x^n}{n} + \ldots \text{ கந்தழி வரை}$$

தெரிப்பு :

$$(1 + x)^y = e^{y \log (1+x)}$$

இடக்கைப் புறம் $(1 + x)^y = 1 + y\,x + \frac{y\,(y-1)}{1.2}\,x^2 + \frac{y\,(y-1)\,(y-2)}{1.2.3}\,x^3$

$+ \ldots\ldots$ கந்தழி வரை ... ... (1)

(ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் மூலம்)

$|\,x\,| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் இத்தொடர் ஓர் அறவும் குவியும் வலுத் தொடராகும்.

வலக்கைப் புறம் $e^{\,y \log (1+x)} =$

$$1 + \frac{y \log\,(1+x)}{\lfloor 1} + \frac{y^2\,[\log\,(1+x)]^2}{\lfloor 2}$$

$+ \ldots\ldots$ கந்தழிவரை ... ... (2)

(படிக்குறித் தேற்றத்தின் மூலம்)

இத்தொடரும் $|\,x\,| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் ஓர் அறக் குவியும் வலுத் தொடராகும்.

எனவே வலுத் தொடரின் தேற்றத்தின்படி இரு தொடர் களின் சமபடிக் கெழுக்கள் சமமாகும்.

$$\therefore\ \ 1 + yx + \frac{y\,(y-1)}{1.2}\,x^2 + \frac{y\,(y-1)\,(y-2)}{1.2.3}\,x^3 + \ldots\ \infty$$

$$= 1 + \frac{y \log\,(1+x)}{\lfloor 1} + \frac{y^2\,[\log\,(1+x)]^2}{\lfloor 2} + \ldots\ldots\ \infty$$

இதில் y-ன் கெழுவைச் சமன்செய்தால்,

$$x - \frac{x^2}{1.2} + \frac{1.2.x^3}{1.2.3} - \frac{1.2.3.x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots\ \infty = \log\,(1+x).$$

$$\therefore\ \ \log\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots\ \infty.$$

கிளைத் தேற்றங்கள் 1 :

(1), (2) இவ்விரு வலுத்தொடர்களின் y^2-ன் கெழுவை ஒப்பிட்டால் $[\log(1+x)]^2$-ன் மதிப்பு கிடைக்கும்.

எனவே,

$$\frac{1}{\lfloor 2}\ [\log 1+x)]^2 = \frac{y(y-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}x^4 + \dots\infty$$ -லிருந்து y^2-ன் கெழு

$$= y\left[\frac{(y-1)}{1.2}x^2 + \frac{(y-1)(y-2)}{1.2.3} + \frac{(y-1)(y-2)(y-3)}{1.2.3.4}x^4 + \dots\infty\right]$$ -லிருந்து y^2-ன் கெழு.

$$= \frac{(y-1)}{1.2}x^2 + \frac{(y-1)(y-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \frac{(y-1)(y-2)(y-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}x^4 + \dots\infty$$ -லிருந்து y-ன் கெழு.

$$= \frac{x^2}{1\,.\,2} - \frac{(1+2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \frac{(1.2+2.3+3.1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}x^4 - \dots\dots\infty$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)x^3 + \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^4 \dots\dots\infty$$

$$\therefore\ [\log(1+x)]^2 = 2\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)x^3 + \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^4 - \dots\dots\infty\right]$$

இனைத் தேற்றம் 2 :

$-1 < x < 1$ ஆனால்

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n} + \dots \quad (1)$$

இங்கு $x = -x$ என ஈடு செய்ய,

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} \dots$$

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots (2)$$

$\therefore$ (1) ஐயும் (2) ஐயும் கூட்ட,

$$\log(1+x) - \log(1-x) = 2x + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + 2 \cdot \frac{1}{5} x^5 + \dots$$

$$\therefore \log\left[\frac{(1+x)}{(1-x)}\right] = 2\left[x + \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{5} x^5 + \dots\right] \quad \dots (3)$$

கிளைத் தேற்றம் 3 :

(3)-ல் $x = \dfrac{1}{2n+1}$ என ஈடு செய்தால்

$$\log \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = 2\left[\frac{1}{(2n+1)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^5} + \dots \infty\right]$$

$$\therefore \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = 2\left[\frac{1}{(2n+1)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^5} + \dots \infty\right]$$

$|x| = \left|\frac{1}{2n+1}\right| < 1$ என்ற மதிப்பிற்கு இத்தொடர் உண்மையாகும். ... ... (4)

அதாவது $n > 0$ அல்லது $n < -1$ என்ற மதிப்புகளுக்காகும்.

கிளைத் தேற்றம் 4 :

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{m}{n} \text{ என்றால் } x = \frac{m-n}{m+n} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே (3) -ல் ஈடு செய்ய

$$\log\frac{m}{n} = 2\left[\left(\frac{m-n}{m+n}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \dots\right] \quad (5)$$

இத்தொடர் $\left|\frac{m-n}{m+n}\right| < 1$ என்ற மதிப்பிற்கு உண்மையாகும்.

அதாவது $\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 - 1 < 0$.

$$\left[\frac{m-n}{m+n} - 1\right]\left[\frac{m-n}{m+n} + 1\right] < 0.$$

$$\left[\frac{2m}{m+n}\right]\left[\frac{-2n}{m+n}\right] < 0.$$

$$-\frac{4mn}{(m+n)^2} < 0.$$

$$-4mn < 0. \qquad \therefore\ 4mn > 0.$$

$$\therefore\ mn > 0.$$

எனவே m, n என்ற இரண்டும் ஒரே குறியை அதாவது கூட்டல் அல்லது கழித்தல் குறியைப் பெற்றிருக்கவேண்டும்.

(5) -ல் $\frac{m}{n} = x$ என்று ஈடு செய்ய,

$$\log x = 2\left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \dots\dots\right] \dots (6)$$

x-ன் எல்லாக் கூட்டெண் மதிப்பிற்கும் உண்மையாகும்.

$x = \frac{1}{2y-1}$ என்றால், $\frac{1+x}{1-x} = \frac{y}{y-1}$ என (3)-ல் ஈடு செய்தால்,

$$\log\frac{y}{y-1} = 2\left\{\frac{1}{2y-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2y-1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2y-1)^5} + \dots\dots\right\} \dots (7)$$

$|x| < 1$ அதாவது $\left|\frac{1}{2y-1}\right| < 1$ என்ற மதிப்பிற்கு இத் தொடர் பொருந்தும்.

அதாவது $(2y-1)^2 > 0$.

$y(y-1) > 0$.

(7) என்ற விரிவானது $y < 0$ அல்லது $y > 1$ என்ற மதிப்புகளுக்கு உண்மையாகும்.

$\log_e 2$-ன் தோராய மதிப்பறிதல் :

(5)-ல் $m = 2$ $n = 1$ எனக் கொண்டால்

$$\log_e 2 - \log_e 1 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \dots\dots\right)$$

$\log_e 1 = 0$. $\qquad \frac{1}{3} = \cdot 333333$

$\frac{1}{3^3} = \cdot 037037 \qquad \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} = \cdot 012345$

$\frac{1}{3^5} = \cdot 004115 \qquad \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} = \cdot 000823$

$\frac{1}{3^7} = \cdot 000457 \qquad \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} = \cdot 000065$

$\frac{1}{3^9} = \cdot 000050 \qquad \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^9} = \cdot 000005$

எனவே முதல் 5 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை

$= 2 \times \cdot 346560$

$= \cdot 69312$

$= \cdot 6931$ தோராயமாக.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\log_e 3$-ன் தோராய மதிப்பைக் காண்க.

$m = \frac{3}{2}$, $n = \frac{1}{2}$ என்று (5)-ல் ஈடு செய்ய

$$\log \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots\right]$$

$\therefore \log 3 = 2\,[\cdot 5$

$+ \cdot 04167$

$+ \cdot 00625$

$+ \cdot 001116$

$+ \cdot 000217$

$+ \cdot 00004\,]$ முதல் 6 உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

$= 2 \times \cdot 549298$

$= 1 \cdot 098586$

$= 1 \cdot 0986$ தோராயமாக.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$0 < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(1+n) < 1$ என்று காட்டு.

$0 < x < 1$ என்றால்,

$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$ என்பது நமக்குத் தெரியும். ... (1)

$x = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}$ என்ற மதிப்புகளைத் தொடர்ச்சியாகக் கொடுத்தால்,

$$\log(1+1) < 1$$

$$\log\left(1+\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$$

... ...

... ...

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

$$\therefore \log\frac{2}{1} + \log\frac{3}{2} + \ldots + \log\frac{n+1}{n} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$\log\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n+1) > 0.$$

$$\frac{1}{x} - \log\frac{x+1}{x} = \frac{1}{x} - \log\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} - \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \log\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(2)-ல் $x = 1, 2, \ldots, n$ என்று மதிப்புகளைக் கொடுத்துக் கூட்டினால்,

$$1 - \log\frac{2}{1} < 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \log\frac{3}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \quad \sum\frac{1}{n} - \log\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1) < 1$$

$$\therefore \quad 0 < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1) < 1$$

குறிப்பு :

முதல் பாகத்தில், இம்மூன்று தொடர்களுக்கும் பல்வேறு எடுத்துக்காட்டுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$a = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \infty \text{ என்றால்}$$

$$x = a + \frac{a^2}{\underline{|2}} + \frac{a^3}{\underline{|3}} + \cdots\cdots \infty \text{ என்று நிறுவுக.}$$

$$a = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \cdots = \log(1+x)$$

$$|x| < 1$$

$$\therefore \quad e^a = e^{\log(1+x)} = 1 + x.$$

$$\therefore \quad x = e^a - 1 = a + \frac{a^2}{\underline{|2}} + \frac{a^3}{\underline{|3}} + \cdots\cdots \infty$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$\log\left[\dfrac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}x}\right]$ ஐ $(x-1)$-ன் ஏறு வரிசையில் எழுதி அந்த விரிவின் முதல் உறுப்பு $\dfrac{1}{6}(x-1)^2$ எனக் காட்டுக.

$h = x - 1$ என்று கொண்டால்,

$x = 1 + h.$

$$\therefore \quad \frac{(2x+n)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}x} = \frac{(2+2h+1)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}(1+h)} = \frac{3^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{2h}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}(1+h)}$$

$$\therefore \quad \log\left[\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}x}\right] = \frac{3}{2}\left(1+\frac{2h}{3}\right) - \log\ (1+h)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{2h}{3} - \frac{4h^2}{18} + \cdots\right) - \left(h - \frac{h^2}{2}\cdots\right)$$

$$= h\,(1-1) + h^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots$$

$$= \frac{h^2}{6} + \cdots$$

$$\therefore \quad \text{முதல் உறுப்பு} = \frac{h^2}{6} = \frac{(x-1)^2}{6}.$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$\log_e\left[\dfrac{1}{1-x-x^2+x_3}\right]$-ன் விரிவில் x^n-ன் கெழு

$= \dfrac{1}{n}$, n ஒற்றைப்படை யெண்ணுனல்

$= \dfrac{3}{n}$, n இரட்டைப்படை யெண்ணுனல்

என்பதை மெய்ப்பாடு செய்க.

$$1 - x - x^2 + x^3 = (1-x)(1-x^2)$$

$$\therefore \log \frac{1}{1 - x - x^2 + x^3} = -\log(1-x) - \log(1-x^2)$$

$$= \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots\right] + \left[x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3} + \ldots\right]$$

(i) n = ஒற்றைப்படை எண் ($= 2r+1$) என்று கொண்டால்,

$\therefore \; x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3} + \ldots$ என்ற விரிவத்தில் x^n-ன் கெழு $= 0$

$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots$ என்ற விரிவத்தில் x^n-ன் கெழு $= \frac{1}{n}$.

(ii) n = இரட்டைப்படை எண் $= 2r$ என்று கொண்டால்,

$\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots\right]$-ன் விரிவில் x^{2r}-ன் கெழு $= \frac{1}{2r}$

$\left[x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + \ldots\right]$-ன் விரிவில் x^{2r}-ன் கெழு $= \frac{1}{r}$.

$\therefore \; x^{2r}$-ன் கெழு $= \frac{1}{2r} + \frac{1}{r} = \frac{3}{2r} = \frac{3}{n}$.

$\therefore \; \log \frac{1}{1 - x - x^2 + x^3}$-ன் விரிவில் x^n-ன் கெழு $\frac{1}{n}$ அல்லது $\frac{3}{n}$ ஆகும்.

4. எண் கொள்கை

(Theory of Numbers)

4·1. இப்பகுதி முழுவதும் 'எண்' என்று குறிப்பிடுவது ஒரு கூட்டு முழு எண்ணை (Positive integer) மட்டுமேயாகும். அத்துடன் மீதியின்றி வகுக்கப்படும் எண்ணைக் குறிக்கும்போது 'வகுபடும்' என்று குறிப்பிடப்படும்.

a என்ற எண்ணை b என்ற எண்ணால் வகுத்தால் q ஈவாகவும், r மீதியாகவும் வருமேயாகில் $a = bq + r\ (0 \leqslant r < b)$ ஆகும். $r = 0$ என்றால் a என்னும் எண் b-யினால் மீதியின்றி வகுக்கப்படுகிறது. எனவே $a = bq$ ஆகும். இதையே நாம் $a = M(b)$ என்று குறிப்பிடுவோம். a ஆனது b-ன் மடங்கு (Multiple of b) என்பதையே நாம் $M(b)$ என்று எழுதுகிறோம்.

ஓர் எண் அந்த எண்ணாலும், ஒன்றாலும் மட்டுமே வகுபடுமேயானால் அதை நாம் பகா எண் (Prime number) என்று அழைக்கிறோம். உதாரணமாக 2, 3, 5, 7, 11, 13 - இவைகள் பகா எண்கள் ஆகும்.

4·2. ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள் (Numbers Prime to each other)

இரண்டு எண்களுக்கு ஒன்றைத் (1) தவிர வேறு எந்த பொதுக் காரணியும் இல்லையாகில் அந்த இரண்டு எண்களையும் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள் என்கிறோம். உதாரணமாக 11, 13 ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். 24, 35 ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

4·3. தொகுப்பெண் (Composite number)

ஓர் எண் அந்த எண்ணாலும் ஒன்றாலும் மட்டுமேயன்றி வேறு எவையேனும் எண்களாலும் வகுபடுமேயாகில் அத்தகைய எண்ணைத் தொகுப்பெண் என்கிறோம்.

உதாரணம் : 6, 9, 10.

தொகுப்பெண்ணை இரண்டு காரணிகளாகப் பிரித்தால் ஒன்று அத்தொகுப்பெண்ணின் மூலத்தை விடப் பெரியதாக இருக்கும்; மற்றொன்று மூலத்தை விடச் சிறியதாக இருக்கும். அப்படி இல்லா விடில் இரண்டுமே சமமாக இருக்கும்.

உதாரணமாக : $36 = 12 \times 3$

$$\therefore 12 > 6$$

$$3 < 6$$

$$36 = 6 \times 6$$

4·4· எருற்றெத்தெனிசுவின் வடிகட்டு (The Seive of Eratosthenes)

எருற்றெத்தெனிசு என்ற கணித மேதை ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணுக்குக் குறைந்த எல்லாப் பகா எண்களையும் காணும் முறையை வகுத்துள்ளார். அம் முறை பின்வருமாறு :

50-க்குக் குறைந்த பகா எண்களை அறிய, முதலில் 1 முதல் 50 வரை எண்களை எழுதிக் கொள்ளவேண்டும்.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

முதலில் 2-ன் மடங்குகளாகிய 4, 6, 8...... என்ற எண்களை, மேலே எழுதியுள்ள 1 முதல் 50 வரையுள்ள எண்களில் நீக்க வேண்டும்.

பின்னர் அடுத்து நீக்கப்படாத எண்ணுகிய 3-ன் மடங்குகளாகிய 6, 9, 12...என்ற எண்களை நீக்கவேண்டும். இவைகளுள் சில, 2-ன் மடங்குகளை நீக்கும்போது நீக்கப்பட்டிருக்கும்.

பின்னர் 5-ன் மடங்குகளாகிய 10, 15, 20...என்ற எண்களை நீக்கவேண்டும். இவைகளுள் சில 2-ன் மடங்குகளாயும், 3-ன் மடங்குகளாயும் நீக்கும் போதே நீக்கப்பட்டிருக்கும்.

இவ்வாறே 7-ன் மடங்குகளாகிய 14, 21, 28, 35, 42 49ஐ நீக்கவேண்டும். 14, 21, 28, 35, 42 என்ற எண்கள் ஏற்கெனவே 2-ன் மடங்கு, 3-ன் மடங்கு, 5-ன் மடங்குகளை நீக்கும் போதே நீக்கப்பட்டிருக்கும். எனவே, 49 மட்டும் 7-ன் மடங்கில் நீக்காது உள்ள எண். அதையும் நீக்கவேண்டும்.

இவ்வாறு நீக்கப்படாத எண்களின் மடங்குகளை நீக்கிக் கொண்டே போனுல் 1 முதல் 50 வரை உள்ள பகா எண்களின் தொகுப்புக் கிடைக்கும்.

கட்டங்களில் உள்ள எண்களே 1 முதல் 50 வரை உள்ள பகா எண்கள் ஆகும். அதாவது,

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 43, 47 என்பவைகளே 1 முதல் 50 வரை உள்ள பகா எண்கள்.

4·5. **தேற்றம்** 1:

a ஐ b ஆல் வகுக்கும் போது q ஈவாகவும், r மீதியாகவும் வருமாகில், a-க்கும் b-க்கும் உள்ள பொதுக் காரணிகளே b-க்கும் r-க்கும் பொதுவாக உள்ள காரணிகளாகும்.

தெரிப்பு :

$a = bq + r$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே a, b என்ற இரண்டையும் மீதியின்றி வகுக்கும் எந்த எண்ணும் 'r' ஐயும் மீதியின்றி வகுக்கும்.

விளக்கக் குறிப்பு :

$138 = 24 \times 5 + 18$. இங்கு $a = 138$, $b = 24$, $q = 5$, $r = 18$. 138, 24-இவற்றின் பொதுக்காரணிகள் 2, 3 ஆகும். இவை 24, 18-க்கும் பொதுக் காரணிகளாகும்.

4·6. தேற்றம் 2 :

ஓர் எண் (x) எவையேனும் இரண்டு எண்களின் பெருக்குத் தொகையை $(a \times b)$ மீதியின்றி வகுக்குமானால் அந்த எண் (x) இரண்டு எண்களில் ஒன்றுக்கு, ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்ணானால் (Prime to each other), அந்த எண் இரண்டாவது எண்ணை மீதியின்றி வகுக்கும்.

$a \times b$ ஐ, x மீதியின்றி வகுத்தால், x-ம் b-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானால், a ஐ x மீதியின்றி வகுக்கும்.

தெரிப்பு :

$a \times b = M(x) = Qx$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதாவது ab ஐ x மீதியின்றி வகுக்குமானால் Qb ஆனது x-ன் மடங்காகும். அதையே நாம் $M(x) = Qx$ என்று எடுத்துள்ளோம். x-ம் b-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும். இரண்டு பக்கங்களையும் x ஆல் வகுத்தால்,

$$\frac{a \times b}{x} = \frac{Qx}{x}$$

$$\frac{a \times b}{x} = Q = \text{ஒரு முழு எண்}$$

இடப் புறத்தில் b ஐ x ஆல் மீதியின்றி வகுக்க முடியாது. ஏனெனில் x-ம் b-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும். அதாவது b-க்கும் x-க்கும் பொதுக் காரணி 1 மட்டும்தான்.

இடப்புறமும் ஒரு முழு எண் வரவேண்டுமானால், $\left(\frac{a}{x}\right)$ ஒரு முழு எண்ணாக இருக்க வேண்டும். அப்படி இருக்குமாகில்,

$\left(\frac{a}{x}\right) \times b =$ முழு எண் $\times\ b = Q$ என்ற முழு எண். ஆகையால், $\left(\frac{a}{x}\right)$ ஒரு முழு எண்ணாகையால் a ஐ x மீதியின்றி வகுக்கும்.

எனவே $a \times b$ ஐ, x மீதியின்றி வகுத்தால், x-ம் b-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானால், x இரண்டாவது எண் 'a' ஐ மீதியின்றி வகுக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$6 \times 7 = 42 = 14 \times 3$$

$$6 \times 7 = M(3)$$

இந்த எடுத்துக்காட்டில் $a = 6$, $b = 7$, $Q = 14$, $x = 3$ என்று கொள்வோமானால், 7-ம் 3-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும். ஜே 3 மீதியின்றி வகுக்கும். $6 = M(3) = 2 \times 3$.

4·7. கிளைத்தேற்றங்கள் :

(i) ஒரு பகா எண் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட எண்களின் பெருக்குத் தொகையை மீதியின்றி வகுத்தால், அவற்றுள் ஏதேனும் ஓர் எண்ணையாகிலும் மீதியின்றி வகுக்கும்.

(ii) ஒரு பகா எண் a^m ஐ வகுக்குமாயின் அந்த எண் a ஐ மீதியின்றி வகுக்கும்.

(iii) $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ என்ற எண்கள் ஒவ்வொன்றும் a என்ற எண்ணுக்கு ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானால் a-ம், $(\alpha \times \beta \times \gamma \ldots)$ என்று பெருக்கி வரும் எண்ணும் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும்.

(iv) a-ம், b-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாயின் a^p-ம் b^q-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும்.

4·8. தேற்றம் 3 :

ஒவ்வொரு தொகுப்பு எண்ணுக்கும் குறைந்தது ஒரு பகா எண் காரணி உண்டு.

தெரிப்பு :

p என்ற ஒரு தொகுப்பு எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம். p-க்கு 1, p என்பவற்றைத் தவிர வேறு காரணிகளும் உண்டு. அவைகள் p ஐ விடச் சிறியனவாக இருக்கவேண்டும். அவற்றுள் மிகச் சிறிய காரணி 'l' என்று எடுத்துக் கொள்வோம். 'l' ஒரு பகா எண் என்று நிரூபிக்கவேண்டும்.

l பகா எண்ணாக இல்லாவிடில், 'l'-க்குக் காரணிகள் உண்டு. அவை ஒவ்வொன்றும் p-க்கும் காரணிகளே. அவை l ஐ விடச் சிறியனவாக இருக்க வேண்டும். ஆனால் l தான் p-ன் மிகச் சிறிய காரணி என்று எடுத்துள்ளோம். எனவே நாம் எடுத்துக் கொண்டதற்கு முரண்பாடாக இருப்பதால், l ஐ விடச் சிறியதாகக் காரணிகள்

இருக்க முடியாது. ஆகையால் l ஒரு பகா எண்ணாகும். அதுவே p-ன் மிகச் சிறிய காரணி, ஆகவே ஒரு தொகுப்பு எண்ணுக்குக் குறைந்தது ஒரு பகா எண் காரணி உண்டு.

பகா எண்களின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ளதா அல்லது முடிவில்லாததா என்ற கேள்வி கணித மேதைகளுக்கு எழுந்தது. ஆயிலர் என்ற கணித மேதை பகா எண்களின் எண்ணிக்கை முடிவில்லாதது என நிரூபித்துள்ளார்.

4·9. தேற்றம் 4 :

பகாயெண்களின் எண்ணிக்கை முடிவில்லாதது.

தெரிப்பு :

பகாயெண்களின் எண்ணிக்கை மொத்தம் 'N' என்று எடுத்துக் கொள்வோம். N ஒரு திட்டமான எண்ணாகும். அவைகள் p_1, p_2, p_3, ..., p_N என்று எடுத்துக் கொண்டால், எண்ணினத்தில் p_1, p_2, p_3, ..., p_N என்ற பகா எண்களைத் தவிர மற்றவை தொகுப்பெண்களாக இருக்கும்.

$a = p_1\, p_2\, p_3 \cdots p_N + 1$ என்ற எண்ணை எடுத்துக் கொண்டால், a ஐ p_1 ஆல் வகுத்தால் $p_2\, p_3 \cdots p_N$ ஈவாகவும், 1 மீதியாகவும் வரும். எனவே a-ம், p_1-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும். இதே போல் a ஐ $p_2, p_3 \ldots p_N$ என்ற எந்த பகா எண்ணால் வகுத்தாலும் 1 மீதி வரும். எனவே a-ம் ஒரு பகா எண் ஆகும்; அல்லது a-க்கு $p_1, p_2 \ldots p_N$ ஐத் தவிர்த்து ஒரு பகா எண் காரணி இருக்கவேண்டும். ஆனால், இது நாம் $p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_N$ என்ற எண்கள் மட்டுமே எண்ணினத்தில் உள்ள பகா எண்கள் என்று எடுத்துக் கொண்ட கொள்கைக்கு முரண்பாடாக உள்ளது. எனவே பகா எண்களின் எண்ணிக்கை கணக்கிலடங்காதது.

மேற்கூறிய தேற்றத்தின் மூலம் நாம் கணக்கில்லாத பகா எண்களைக் கண்டுபிடிக்கும் முறையினைக் காணலாம். 2-ம், 3-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். எனவே

$2 \times 3 + 1 = 7$ - பகாயெண்

$2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$,,

$2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 = 211$,,

... ...

... ...

ஆனால் இம்முறையினைக் கையாண்டு நாம் எல்லாப் பகா எண்களையும் கண்டுபிடிக்க இயலாது. எனவே கணித மேதைகள் சிலர் பகா எண்களைக் கண்டுபிடிக்க சில இயற்கணித வாய்பாடுகளை சில கட்டுப்பாடுகளில் அமைத்துள்ளார்கள். ஆனாலும் அவ்வாய்பாடுகள் எல்லாப் பகா எண்களையும் கண்டுபிடிக்கப் பயன்படா.

n-ன் சில குறிப்பிட்ட மதிப்புகளுக்கு, சில இயற்கணித வாய்பாடுகளைக் கொண்டு பகா எண்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம். அவைகளுள் சில கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$n < 40$ ஆனால் $n^2 + n + 41$ என்பது ஒரு பகா எண்ணாகும்.

$n < 16$ ஆனால் $n^2 + n + 17$ ஒரு பகா எண்.

$n < 29$ ஆனால் $2n^2 + 29$ ஒரு பகா எண்.

$n < 80$ ஆனால் $n^2 - 79n + 1601$ ஒரு பகா எண்.

$n < 5$ ஆனால் $2^{2n} + 1$ ஒரு பகா எண்.

4·10. தேற்றம் 5 :

ஒரு தொகுப்பெண்ணைப் பகா எண்களின் பெருக்குத் தொகையாக ஒரே ஒரு தனிச் சிறப்பான முறையில் எழுதலாம்.

தெரிப்பு :

ஒரு தொகுப்பெண்ணுக்குக் குறைந்தது ஒரு பகா எண் காரணியாக இருக்கும் என்பதைப் (தேற்றம் 3-ல்) பார்த்தோம். N என்பதை ஒரு தொகுப்பெண்ணாக எடுத்துக்கொண்டால் இதற்குக் குறைந்தது ஒரு பகா எண் காரணி உண்டு. அதை 'a' என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$N = ax \text{ ஆகும்.}$$

x-ம் ஒரு பகா எண்ணாக இருக்கலாம். அப்படி x ஒரு பகா எண்ணாக இல்லாவிடில், ஒரு தொகுப்பெண்ணாக இருக்க வேண்டும்.

x ஒரு தொகுப்பெண்ணாக இருக்குமானால், x-க்குக் குறைந்தது ஒரு பகா எண்ணாவது காரணியாக இருக்கவேண்டும். b ஆனது x-ன் பகா எண் காரணியாக இருக்குமாகில்

$$x = by \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore\ N = ax = a(by) = ab(y) = \ldots\ldots\ldots$ இவ்விதமாக நாம் தொடர்ந்து எழுதிக்கொண்டே போனல் கடைசியில் ஒரு பகா எண் காரணியில் வந்து முடியும்.

$\therefore\ N = a\,b\,c\,d\ldots\ldots k$ எனப் பகா எண்களின் பெருக்குத் தொகையாக இருக்கும்.

இந்த ஒரே ஒரு முறையில்தான் Nஐ எழுதலாம்; வேறு எந்த முறையிலும் எழுத முடியாது என்று நிறுவலாம். N ஐ வேறு முறையிலும் பகாயெண்களின் பெருக்குத்தொகையாக எழுத முடியும் என்று எடுத்துக் கொள்வோம். அதாவது,

$N = \alpha\beta\gamma\ldots\phi$ என்று எடுத்துக்கொண்டால் $N = a\,b\,c\,d\ldots k = \alpha\beta\gamma\ldots\ldots\phi$.

N ஐ α ஆல் வகுத்தால், $\frac{N}{\alpha} = \beta\gamma\ldots\ldots\phi =$ ஒரு முழு எண் வரும்.

$\therefore\ \frac{N}{\alpha} =$ ஒரு முழு எண்.

$\therefore\ \frac{a\,b\,c\,d\ \ k}{\alpha}$ ஒரு முழு எண்.

ஆனல் a, b, $c\ldots$ எல்லாம் பகா எண்கள். α-ம் ஒரு பகா எண்ணுக இருப்பதால், α என்னும் பகா எண், $a, b, c, \ldots, k$ என்பவற்றுள் ஏதேனும் ஓர் எண்ணுக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும். அப்படி இருந்தால்தான் நமக்கு முழு எண் கிடைக்கும். $\alpha = a$ என்று எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\frac{a\,b\,c\,d\ \ k}{\alpha} = b\,c\,d\,.\,k = \text{ஒரு முழு எண்.}$$

இவ்வாறு தொடர்ந்து கொண்டே போனல், $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \phi$ என்ற எண்களும் $a, b, c \ldots k$ என்ற எண்களும் ஒன்றே ஆகும்.

எனவே $N = \alpha\beta\gamma\ldots\phi$ என்பதை,

$N = abc\ldots k$ என்றே எழுதலாம்.

ஆகையால் $N = abc\ldots k$ என்ற ஒரே ஒரு சிறப்பான முறையில் பல எண்களின் பெருக்குத் தொகையாக N என்ற தொகுப்பெண்ணை எழுதலாம்.

குறிப்பு :

$N = a^x\, b^y\, c^z$ ... என்ற முறையிலும் எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$480 = 16 \times 30$$
$$= 16 \times 2 \times 15$$
$$= 32 \times 3 \times 5$$
$$= 2^5 \times 3^1 \times 5^1$$ ஆகும்.

N ஐ மீதியின்றி வகுக்கக்கூடிய எண்களின் எண்ணிக்கை :

4·11. தேற்றம் 6 :

$p, q, r, \ldots$ என்பன பகா எண்கள், a, b, c என்பன நேர் முழு எண்கள். $N = p^a\, q^b\, r^c \ldots u^k$ எனில், N ஐ மீதியின்ற வகுக்கும் எண்களின் எண்ணிக்கை $(a+1)(b+1)(c+1) \ldots (k+1)$ ஆகும்.

தெரிப்பு :

$N = p^a\, q^b\, r^c \ldots u^k$ என்ற எண்ணை மீதியின்றி வகுக்கும் எண் $p^{a_1}\, q^{b_1}\, r^{c_1} \ldots u^{k_1}$ என்று இருக்குமானல்,

$$0 \leqslant a_1 \leqslant a$$
$$0 \leqslant b_1 \leqslant b$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$ ஆகும்.

$p^{a_1}\, q^{b_1}\, r^{c_1} \quad u^{k_1}$ போன்ற எண்கள்,

$[1 + p + p^2 + \ldots + p^a] \quad [1 + q + q^2 + \ldots + q^b]$ $[1 + r + r^2 + \ldots + r^c]$ ... ... என்ற பெருக்குத்தொகையில் வரும். இத்தொகுப்பில் 1, $N = (p^a\, q^b\, r^c \ldots u^k)$ ஐயும் சேர்க்கப்பட்டுள்ளது. இப் பெருக்குத் தொகையில் $(a+1)(b+1) \ldots \ldots (k+1)$ உறுப்புகள் உள்ளன.

ஆகையால் N ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்களின் எண்ணிக்கை $(a+1)(b+1)(c+1) \ldots (k+1)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

480ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்கள், 1; 480ஐத் தவிர எத்தனை ஆகும் ?

$$480 = 2^5\ 3^1\ 5^1.$$

இங்கு $a = 5,\ b = 1,\ c = 1.$ எனவே 480 ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்களின் எண்ணிக்கை,

$$= (5+1)(1+1)(1+1)$$
$$= 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24 \text{ ஆகும்.}$$

[இந்த 24 எண்களும், $(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)$ $(1 + 3)$ $(1 + 5)$-ல் தோன்றும் உறுப்புகள் ஆகும்.]

எனவே 480 ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்கள் 1; 480 ஐத் தவிர 22 எண்கள் ஆகும், ஏனெனில் 24 வகுக்கும் எண்களில் 1-ம், 480-ம் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

4·12. தேற்றம் 7 :

$N = p^a q^b r^c \dots \dots u^k$ ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்களின் கூட்டுத் தொகை,

$$\left(\frac{p^{a+1}-1}{p-1}\right)\left(\frac{q^{b+1}-1}{q-1}\right)\left(\frac{r^{c+1}-1}{r-1}\right)\cdots\left(\frac{u^{k+1}-1}{u-1}\right)$$

ஆகும்.

தெரிப்பு :

நாம் தேற்றம் 6-ல் $N = p^a q^b r^c \dots u^k$ ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்கள் $(1 + p + p^2 + \dots + p^a)$ $(1 + q + q^2 + \dots + q^b)$ … $(1 + u + u^2 + \dots + u^k)$ என்ற பெருக்குத் தொகையில் வரும் உறுப்புகள் எனப் பார்த்தோம்.

எனவே அவைகளின் கூட்டுத் தொகை

$$\left(\frac{p^{a+1}-1}{p-1}\right)\left(\frac{q^{b+1}-1}{q-1}\right)\left(\frac{r^{c+1}-1}{r-1}\right)\cdots\left(\frac{u^{k+1}-1}{u-1}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

15435 ஐ மீதியின்றி வகுக்கக் கூடிய எண்கள் எத்தனை ? அவற்றின் கூட்டுத் தொகை என்ன ?

$$15435 = 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^3.$$

$\therefore$ 15435 ஐ மீதியின்றி வகுக்கக் கூடிய எண்களின் எண்ணிக்கை,

$$= (2+1)(1+1)(3+1) = 3 . 2 . 4$$
$$= 24$$

அவற்றின் கூட்டுத் தொகை

$$= (1 + 3 + 3^2)(1 + 5)(1 + 7 + 7^2 + 7^3)$$

என்ற பெருக்குத் தொகையில் தோன்றும் உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

$$= \left(\frac{3^3-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^2-1}{5-1}\right)\left(\frac{7^4-1}{7-1}\right)$$

$$= \left(\frac{26}{2}\right)\left(\frac{24}{4}\right)\left(\frac{2400}{6}\right)$$

$$= 13.6.400$$

$$= 31200.$$

4.13. முழு எண் மதிப்பு : (Integral part of a real number)

x-ன் முழு எண் மதிப்பை $I(x)$ என்று குறிப்பிடுகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக $I\left(3\frac{2}{3}\right) = 3.$ $I\left(\frac{4}{9}\right) = 0.$ $I(\sqrt{2}) = 1.$

4.14. தேற்றம் 8 :

p ஒரு பகா எண் ஆகில் $\underline{|n}$ -ல் p-ன் மிகப் பெரிய படி

$$I\left(\frac{n}{p}\right) + I\left(\frac{n}{p^2}\right) + I\left(\frac{n}{p^3}\right) + \ldots$$

தெரிப்பு :

$n < p$ ஆனால் $\underline{|n}$ -ல் p ஆல் மீதியின்றி வகுக்கும் எண்கள் இருக்க முடியாது.

$n \geqslant p$ ஆனால், $\underline{|n}$ -ல் p ஆல் மீதியின்றி வகுக்கும் எண்கள் இருக்க முடியும்.

$\lfloor n = 1.2.3. \ldots n$ என்ற பெருக்குத் தொகையில் p ஐக் காரணியாகக் கொண்ட உறுப்புகள்,

$$p,\ 2p,\ 3p \ldots I\left(\frac{n}{p}\right)p \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$\therefore\ I_1 = I\left(\frac{n}{p}\right)$ உறுப்புகள் $\lfloor n$ -ல் p ஆல் வகுபடும்.

p^2 ஐக் காரணியாகக் கொண்ட உறுப்புகள்

$$p^2,\ 2p^2,\ 3p^2 \ldots I\left(\frac{n}{p^2}\right)p^2. \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$I_2 = I\left(\frac{n}{p^2}\right)$ உறுப்புகள் $\lfloor n$ -ல் p^2 ஆல் வகுபடும்.

அதேபோல் p^3 ஐக் காரணியாகக் கொண்ட உறுப்புகள்

$$p^3,\ 2p^3,\ 3p^3 \ldots \ldots I\left(\frac{n}{p^3}\right)p^3 \text{ . ஆகும்.} \quad \ldots \quad (3)$$

$I_3 = I\left(\frac{n}{p^3}\right)$ உறுப்புகள் $\lfloor n$ -ல் p^3 ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்.

அவ்வாறே p^4, p^5 ... என்பவற்றைக் காரணிகளாகக் கொண்ட உறுப்புகளை எழுத வேண்டும்.

ஒரு நிலையில் $I\left(\frac{n}{p^k}\right) = 0$ ஆகும். (2) வரிசையில் p^2 ஐக் காரணியாகக் கொண்ட உறுப்புகள் ஒரு முறை (1) வரிசையில் வரும். அதேபோல் p^3 ஐக் காரணியாகக் கொண்ட (3) வரிசை உறுப்புகள் ஒரு முறை (1)-லும் (2)-லும் தோன்றும். அவ்வாறே மற்ற உறுப்புகளும். எனவே, $\lfloor n$ -ல் p தோன்றும் மிகப் பெரிய படி,

$$I_1 + I_2 + I_3 + \ldots \ldots + I_{k-1}$$

$$= I\left(\frac{n}{p}\right) + I\left(\frac{n}{p^2}\right) + I\left(\frac{n}{p^3}\right) + \ldots + I\left(\frac{n}{p^{k-1}}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$\underline{|900}$-ல் 7-ன் மிகப் பெரிய படி என்ன ?

$I_1 = I\left(\frac{900}{7}\right) = 128$ உறுப்புகள் $\underline{|900}$-ல் 7-ஐக் காரணியாகக் கொண்டுள்ளன. அவைகள் 7, 14, 21 ... ... $I\left(\frac{900}{7}\right) \times 7$ ஆகும்.

அதேபோல் 7^2 ஆல் வகுபடும் எண்கள்,

$$7^2,\ 2 . 7^2,\ 3 . 7^2\ \dots\ \dots\ I\left(\frac{900}{7^2}\right) \times 7^2.$$

அதாவது, $49,\ 98,\ \dots\ \dots\ \dots\ I\left(\frac{900}{7^2}\right) \times 7^2$

∴ அவற்றின் எண்ணிக்கை

$$= I_2 = I\left(\frac{900}{7^2}\right) = I\left(\frac{128}{7}\right) = 18 \text{ ஆகும்.}$$

7^3 ஆல் வகுபடும் உறுப்புகள்,

$$7^3,\ 2 . 7^3,\ 3 . 7\ \dots\ \dots\ I\left(\frac{900}{7^3}\right) p^3 \text{ ஆகும்.}$$

அவற்றின் எண்ணிக்கை,

$$I_3 = I\left(\frac{900}{7^3}\right) = I\left(\frac{18}{7}\right) = 2.$$

∴ 7-ன் மிகப் பெரிய படி.

$$= I_1 + I_2 + I_3 = 128 + 18 + 2 = 148.$$

4·15. தேற்றம் 9 :

அடுத்தடுத்து வரும் n முழு எண்களின் பெருக்குத்தொகை $(x+1)(x+2)(x+3) \dots (x+n)$ ஆனது $\underline{|n}$ ஆல் வகுபடும்.

தெரிப்பு :

அடுத்தடுத்த n முழு எண்களின் பெருக்குத்தொகை

$$= (x+1)(x+2)(x+3)\ \dots\ \dots\ (x+n).$$

$$= \frac{(1.2.3 \ldots x)}{\lfloor x}.\ [(x+1)(x+2)\ldots(x+n)]$$

$$= \frac{\lfloor x+n}{\lfloor x}$$

$$\therefore \quad \frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{\lfloor n} = \frac{\lfloor x+n}{\lfloor x \times \lfloor n}$$

$$= {}^{x+n}C_n = {}^{x+n}C_x.$$

= ஒரு கூட்டு முழு எண்.

எனவே அடுத்தடுத்த n முழு எண்களின் பெருக்குத் தொகையை $\lfloor n$ ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம்.

4·16. தேற்றம் 10 :

n ஒரு பகா எண்ணாக இருக்குமானால் nC_r ஐ n ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம்.

தெரிப்பு :

$$nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r} = \frac{1.2.3 \ldots (n-r)(n-r+1)\ldots(n-1)^n}{(1.2.3 \ldots r)\ [1.2.3 \ldots (n-r)]}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3 \ldots r.}$$

தேற்றம் 9-ன் மூலம், $(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ என்ற அடுத்தடுத்த r முழு எண்களின் பெருக்குத்தொகையை $\lfloor r$ ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம். இப்பொழுது n ஒரு பகா யெண். எனவே n ஐ விடச் சிறியனவாக உள்ள எண்கள் n உடன் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும். $n > r$ ஆகையால், $1.2.3 \ldots r$ என்ற எல்லா எண்களும் n ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும். எனவே அவைகளின் பெருக்குத் தொகை

$1.2.3 \ldots r = \lfloor r$ -ம், n ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்ணாகும்.

எனவே தேற்றம் 2-ன் படி,

$n\left[\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}\right]$-ல், n-ம், $\lfloor r$ -ம் ஒன்றுக் கொன்று பகா எண்கள். எனவே $(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ ஐ $\lfloor r$ மீதியின்றி வகுக்கும்.

$$\therefore \quad n\left[\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{\underline{|r}}\right]=n \text{ [முழு எண்]}.$$
$$= M(n).$$

$\therefore \quad nC_r = M(n).$

எனவே, nC_r ஐ n ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம்.

4·17. ஆய்லர் சார்பு (Euler's Function) $\phi(N)$.

N என்ற எண்ணுக்குக் குறைவாய் N ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்ணாய் உள்ள எண்களின் எண்ணிக்கை $\phi(N)$ என்ற சார்பால் குறிக்கப்படுகிறது. ஆய்லர் என்ற கணித மேதையால் இந்தச் சார்பு குறிக்கப்பட்டதால் இது ஆய்லர் சார்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது. $\phi(N)$ கணக்கிடும்போது 1 ஐ எல்லா எண்களுக்கும் பகா எண்ணாக எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

$\phi(1)$ மட்டும் மேற் கூறிய வரையறையின்படி இல்லாததால்

$\phi(1) = 1$ என்று எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\phi(2) = 1$ [2 ஐ விடக் குறைவானதாகவும், 2 க்குப் பகா எண்ணாகவும் உள்ள எண் 1 மட்டும்தான்]

$\phi(3) = 2$ [3 ஐ விடக் குறைவானவையாகவும், 3 க்குப் பகா எண்களாகவும் உள்ள எண்கள் 1, 2 மட்டும் தான்]

$\phi(4) = 2$ [1, 3 இவை இரண்டு எண்களும் 4 ஐ விடக் குறைவானவை. 4 ஓடு ஒன்றுக் கொன்று பகா எண்களாகும்.]

$\phi(5) = 4$ [1, 2, 3, 4-இவை நான்கு எண்களும் 5 ஐ விடக் குறைவானவை. 5 ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும்.]

4.18. தேற்றம் 11 :

$\phi(N)$-ன் மதிப்பு $N = p^a q^b r^c \ldots$ எனில் N என்ற எண்ணுக்கு குறைவாய் N உடன் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்ணாய் உள்ள எண்களின் எண்ணிக்கை

$$N\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\ldots$$

ஆகும்.

அதாவது,

$$\phi(N) = N\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right)\dots$$

தெரிப்பு :

நாம் முன்பே $N = p^a q^b r^c \quad u^k$ என்ற ஒரு தொகுப்பு எண்ணை ஒரே ஒரு தனிச் சிறப்பான முறையில் பகா எண்களின் பெருக்குத் தொகையாக எழுதலாம் என்று நிரூபித்தோம். $\phi(N)$ கணக்கிடுவதற்கு N ஐ விடக் குறைவானவையும், N உடன் பொதுக் காரணிகள் கொண்டவையுமான எண்கள் எத்தனை எனக் கண்டுபிடிக்கலாம். இந்த எண்ணிக்கையை N-லிருந்து கழித்தால் கிடைப்பது $\phi(N)$; அதாவது N ஐ விடக் குறைவானவையாயும் N உடன் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகவும் அமைந்த எண்களின் எண்ணிக்கையாகும். N ஐ விடக் குறைவாயும் N உடன் பொதுக் காரணிகள் கொண்டவையுமான எண்கள், N உடன் p, q, r ... என்பவற்றுள் ஒன்று அல்லது பல எண்களைப் பொதுக் காரணிகளாகக் கொண்டிருக்கும்.

1, 2, 3, ... N என்ற எண்களில் p ஆல் வகுபடும் எண்கள் $p, 2p, 3p \dots \left(\frac{N}{p}\right)p$. எனவே $\left(\frac{N}{p}\right)$ எண்கள் p ஆல் வகுபடும்.

அதேபோல் $\frac{N}{q}$ எண்கள் q ஆல் வகுபடும். $\left(\frac{N}{r}\right)$ எண்கள் r ஆல் மீதியின்றி வகுபடும். இதேபோல் $r, s, \dots$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடும் எண்களின் எண்ணிக்கை $\frac{N}{r}, \frac{N}{s} \dots$ ஆகும்.

இதேபோல் pq ஆல் வகுபடக்கூடிய எண்களின் எண்ணிக்கை $\frac{N}{pq}$ ஆகும்.

அவ்வாறே $qr, rs \dots$ ஆல் வகுபடக் கூடிய எண்களின் எண்ணிக்கை முறையே $\frac{N}{qr}, \frac{N}{rs} \dots \dots$ ஆகும். அவ்வாறே மற்ற எண்களும் ஆகும்.

இப்போது $\sum \frac{N}{p} - \sum \frac{N}{pq} + \sum \frac{N}{pqr} \quad \dots \quad \dots \qquad (1)$

என்ற தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம்.

Nக்குக் குறைந்த ஓர் எண், p என்ற ஒரே ஒரு பகா எண்ணுல் மாத்திரம் வகுபடுமானுல், அது ஓர் எண்ணுக $\frac{N}{p}$ -ல் எண்ணப் படுகிறது.

இப்பொழுது N-க்குக் குறைவாய் உள்ள x என்ற எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம். அது p, q, r ... என்ற பகா எண்களில் K எண்களால் வகுபடக் கூடியதாய் இருக்கட்டும். இந்த எண் முதற்கண் (1) என்று குறித்த தொடரில் எத்தனை முறை கணக் கிடப்படுகிறது என்று காண்போம்.

$$\sum \frac{N}{p}\text{-ல் } x, \quad K \text{ முறை கணக்கிடப்படுகிறது.}$$

$$\sum \frac{N}{pq}\text{-ல் } {}^kC_2 \text{ முறை கணக்கிடப்படுகிறது.}$$

$$\sum \frac{N}{pqr}\text{-ல் } {}^kC_3 \text{ முறை கணக்கிடப்படுகிறது.}$$

... ...

... ...

எனவே x, $\Sigma \frac{N}{p} - \Sigma \frac{N}{pq} + \Sigma \frac{N}{pqr}$ ... என்ற தொடரில் கணக்கிடப்படும் முறைகளின் எண்ணிக்கை,

$$= K - {}^kC_2 + {}^kC_3 - {}^kC_4 \ldots\ldots (-1)^{k-1}\, {}^kC_k$$

$$= {}^kC_1 - {}^kC_2 + {}^kC_3 - \ldots\ldots + (-1)^{k-1}\, {}^kC_k$$

$$= (1 - {}^kC_0) + {}^kC_1 - {}^kC_2 + {}^kC_3 - \ldots\ldots$$

$$= 1 - [{}^kC_0 - {}^kC_1 + {}^kC_2 \ldots\ldots]$$

$$= 1 - [1 - 1]^k = 1.$$

அதாவது N-க்குக் குறைவாய் N உடன் பொதுக் காரணிகள் கொண்ட எந்த ஓர் எண்ணும் மேற் குறித்த தொடரில் ஒரே ஒரு முறைதான் எண்ணப்படுகிறது. எனவே N ஐ விடக் குறைவா கவும், N உடன் பொதுக் காரணிகள் கொண்டதாகவும் உள்ள எண்களின் எண்ணிக்கை மேற்குறித்த தொடரின் கூட்டுத்தொகை யாகும். எனவே N ஐ விடக் குறைவாயும், N உடன் ஒன்றுக் கொன்று பகா எண்களாகவும் அமைந்த எண்களின் எண்ணிக்கை

$$= N - \left[\Sigma \frac{N}{p} - \Sigma \frac{N}{pq} + \Sigma \frac{N}{pqr} \ldots \ldots \right]$$

$$= N - \left[1 - \Sigma \frac{1}{p} + \Sigma \frac{1}{pq} - \Sigma \frac{1}{pqr} \dots \right]$$

$$= N \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right) \dots\dots$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

1575-க்குக் குறைவான பகா எண்கள் எத்தனை ?

$1575 = 5^2 . 3^2 . 7$

பகா எண்களின் எண்ணிக்கை

$$= 1575 \left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)$$

$$= 720$$

$\therefore \; \phi(1575) = 720.$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

210-க்கு குறைவான பகா எண்கள் எத்தனை உண்டு ?

$210 = 2 . 3 . 5 . 7.$

பகா எண்களின் எண்ணிக்கை

$$= 210 \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)$$

$$= 210 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7}$$

$$= 48$$

$\therefore \; \phi(N) = 48.$

4·19. கிளைத்தேற்றம் 1 :

$N = ab$ ஆனால் a-ம் b-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானால்,

$$\phi(N) = \phi(ab) = \phi(a) . \phi(b)$$

தெரிப்பு :

$$a = p_1^{a_1} \quad p_2^{a_2} \quad p_3^{a_3} \ \dots \ p_k^{a_k}$$

$$b = q_1^{b_1} \quad q_2^{b_2} \quad q_3^{b_3} \ \dots \ q_r^{b_r}$$

என எடுத்துக் கொள்வோம்.

a, *b* என்ற இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாக இருப்பதால் p_1, p_2, p_k, q_1, q_2 ... q_r ஒன்றுக்கொன்று வேறு பட்டவை.

$$\phi(a) = a\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

$$\phi(b) = b\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_r}\right)$$

$$N = ab = (p_1^{a_1}\ p_2^{a_2}\ p_3^{a_3} \dots p_k^{a_r})\ (q^{b_1}\ q_3^{b_3} \dots q_r^{b_n})$$

$$\therefore \ \phi(N) = N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$
$$\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_r}\right)$$

$$= ab\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$
$$\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_r}\right)$$

$$= \left[a\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\right]$$
$$\times \left[b\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_r}\right)\right]$$

$$= \phi(a) \cdot \phi(b).$$

கிளைத் தேற்றம் 2 :

$a, b, c, d, \dots k$ ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானால்

$$\phi(abcd \dots k) = \phi(a)\ \phi(b) \dots \phi(k).$$

கிளைத்தேற்றம் 3 :

a ஒரு பகா எண் என்றால் $\phi(a^r) = a^r\left(1-\frac{1}{a}\right)$.

4·20. தேற்றம் 12 :

$d_1=1, d_2, d_3, \dots, d_r = n$. இவைகள் n ஐ மீதியின்றி வகுக்கு மானால், $\phi(d_1)+\phi(d_2)\dots\phi(d_r) = n$ ஆகும்.

தெரிப்பு :

$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_n^{a_n}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$ என்பன பகா யெண்கள்; $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ முழு எண்களாகும்.

n ஐ மீதியின்றி வகுக்கக் கூடிய எண்ணை $p_1^x\, p_2^y\, p_3^z \dots$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், x, y, z முறையே $0 \leqslant x \leqslant a_1$, $0 \leqslant y \leqslant a_2, \dots$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் இருக்கும்.

மேற் கூறிய கிளைத்தேற்றத்திலிருந்து,

$$\phi(p_1^x . p_2^y . p_3^z \dots) = \phi(p_1^x)\,\phi(p_2^y)\,\phi(p_3^z)\dots \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $\phi(d_1), \phi(d_2), \phi(d_3) \dots$ என்ற உறுப்புகள்,

$$\{1+\phi(p_1)+\phi(p_1^2)+\dots\phi(p_1^{a_1})\}$$
$$\times\ \{1+\phi(p_2)+\phi(p_2^2)+\dots+\phi(p_2^{a_2})\}$$
$$\times \dots \times \{1+\phi(p_n)+\phi(p_n^2)+\dots+\phi(p_n^{a_n})\} \dots (A)$$

என்ற விரிவில் உள்ள உறுப்புகளேயாகும்.

$$\text{எனவே } \phi(d_1)+\phi(d_2)+\phi(d_3)+\dots+\phi(d_r)$$
$$= (A)\text{-ன் பெருக்கற்பலன்.}$$

$$\text{எனவே } 1+\phi(p_1)+\phi(p_1^2)+\dots+p_1^{a_1})$$
$$= 1+p_1\left(1-\frac{1}{p_1}\right)+p_1^2\left(1-\frac{1}{p_1}\right)$$
$$+\dots+p_1^{a_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)$$
$$= 1+p_1-1+p_1^2-p_1+p_1^3-p_1^2+\dots$$
$$\dots+p_1^{a_1}-p_1^{a_1-1}$$
$$= p_1^{a_1}.$$

அதேபோல

$$1 + \phi(p_2) + \phi(p_2^2) + \dots\dots\phi(p_2^{a_2}) = p_2^{a_2}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

எனவே $\phi(d_1) + \phi(d_2) + \phi(d_3) + \dots + \phi(d_r) = p_1^{a_1} \, p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$

$$= n$$

விளக்கம் :

மேற்கூறிய தேற்றத்தில் $n = 12$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

எனவே 12 ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்கள், 1, 2, 3, 4, 6, 12 ஆகும்.

$$\phi(1) = 1$$
$$\phi(2) = 1$$
$$\phi(3) = 2$$
$$\phi(4) = 2$$
$$\phi(6) = 2$$
$$\phi(12) = 4$$

$\therefore \ \phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \phi(4) + \phi(6) + \phi(12) = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12 = n.$

4·21. நிறையெண்கள் (Perfect Numbers)

ஓர் எண்ணை வகுக்கும் எண்களில், எடுத்துக்கொண்ட எண் நீங்கலாக மீதி எண்களைக் கூட்டினால் அக்கூட்டுத் தொகை யானது எடுத்துக்கொண்ட எண்ணுக்குச் சமமானால், அவ் வெண்ணையே நிறையெண் என்று அழைக்கிறோம்.

ஒரு நிறையெண்ணை வகுக்கக்கூடிய எல்லா எண்களையும் கூட்டினால், அக்கூட்டுத்தொகை நிறையெண்ணைப்போல இரண்டு மடங்காக இருக்கும்.

6 என்பது ஒரு நிறையெண். 6 ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்கள், 1, 2, 3, 6 எனவே 6 ஐ விட்டுவிட்டுக் கூட்டினால் $6 = 1 + 2 + 3$ என்பது நிறையெண்ணின் வரையறையாகும்.

$1 + 2 + 3 + 6 = 12 =$ நிறையெண் 6-ன் இரு மடங்காகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$2^n - 1$ ஒரு பகா எண்ணுயின் $2^{n-1}(2^n - 1)$ என்பது ஒரு நிறையெண் என்று நிரூபி.

$N = p^a q^b = 2^{n-1} \quad (2^n - 1)$ என எடுத்துக் கொண்டால் இங்கு,

$$\left.\begin{array}{ll} p = 2 & q = 2^n - 1 \\ a = (n-1) & b = 1 \end{array}\right\}$$

எனவே N ஐ வகுக்கும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= (1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1})(1 + q)$$

$$= \left(\frac{p^n - 1}{p - 1}\right)(1 + q)$$

$$= (2^n - 1)(1 + 2^n - 1)$$

$$= (2^n - 1)(2^n) = 2^n (2^n - 1)$$

$$= 2 \cdot 2^{n-1} (2^n - 1)$$

$= 2 \cdot N =$ எடுத்துக் கொண்ட N-ன் இருமடங்கு.

எனவே N ஒரு நிறையெண்ணுகும்.

குறிப்பு :

$2^{n-1} \; (2^n - 1)$-ல் n-க்கு வேறு வேறு மதிப்புகளைக் கொடுப்பதால் நமக்கு நிறையெண்கள் கிடைக்கின்றன.

$n = 2$ ஆனுல், $2^{n-1}(2^n - 1) = 2(4-1) = 2 \cdot 3 = 6$. நிறையெண்.

$n = 3$ ஆனுல் $2^{n-1}(2^n - 1) = 4(8-1) = 4 \cdot 7 = 28$. நிறையெண்.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

வகுக்கும் எண்களின் எண்ணிக்கை 30 ஆகக் கொண்ட மிகச் சிறிய எண்ணைக் காண்க.

$30 = 2 \times 3 \times 5$ ஆகும். 2, 3, 5-இவைகள் பகா எண்கள். இந்த மூன்று பகா எண்களுக்குமேல் இருக்க முடியாது.

30 ஆல் வகுபடும் மிகச் சிறிய எண் N என்று எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே $N = 2^{\alpha}\, 3^{\beta}\, 5^{\gamma}$ என இருக்கும். முதலாவதாக, மூன்று பகா எண்களை N பெற்றிருக்குமேயாகில் N ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்களின் எண்ணிக்கை

$$= (1 + \alpha)\,(1 + \beta)\,(1 + \gamma)$$
$$= 30$$

எனவே, $\alpha = 4,\ \beta = 2,\ \gamma = 1$ ஆகும்.

$$\therefore\quad N = 2^4\, 3^2\, 5 = 720 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இரண்டாவதாக,

இரண்டு பகா எண்களைக் கொண்டதாக இருப்பின் $30 = (1 + \alpha)(1 + \beta)$. எனவே α, β-இவற்றின் மதிப்புகள் 14, 1; 5, 4; 9, 2 ஆகும். இவற்றுள் ஏதாகிலும் ஒரு ஜதையைப் பெற்று இருக்கும்.

எனவே $N = 2^{14}.\ 3;\ 2^5.\ 3^4;\ 2^9.\ 3^2.$ ஆகும். ... (2)

மூன்றுவதாக,

ஒரே ஒரு பகா எண்ணைக் கொண்டு இருக்குமாகில்

$$(1 + \alpha) = 30 \qquad \therefore\ \alpha = 29$$

$$\therefore\ N = 2^{29} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(1), (2), (3) - இவைகளுள் மிகச் சிறிய எண் 720 ஆகும். எனவே 720 ஐ 30 மீதியின்றி வகுக்கும்.

4·22. ஒருங்கிசைவு: (Congruence)

a, b என்ற இரண்டு எண்களை m ஆல் வகுக்கும்போது மீதி சமமாக வருமாயின் 'm'-ன் மட்டின் மதிப்பிற்கு a, b ஒருங்கிசை வுடையது என்கிறோம்.

இதை $a \equiv b$ (மட்டு m) என்று எழுதலாம்.

$$a = pm + r$$

$$b = qm + r$$ என இருக்குமானால்,

$a - b = (p - q)\, m = km = (M)\, m$. ஆகும். இங்கு $k = 0$, கூட்டு அல்லது குறை எண்ணாக இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $35 \equiv 14$ (மட்டு 3)

$28 \equiv 16$ (மட்டு 6)

$45 \equiv 3$ (மட்டு 7).

4·23. எச்சம் (Residue) :

$a - b = km = M(m)$ ஆனால் m-ன் மட்டையொட்டி b, a-ன் எச்சம்; a, b-ன் எச்சம் எனப்படும்.

4·24. தேற்றம் 13 :

$a \equiv b$ (மட்டு x), $a_1 \equiv b_1$ (மட்டு x) ஆனால்

(i) $a \pm a_1 \equiv b \pm b_1$ (மட்டு x).

(ii) $aa_1 \equiv bb_1$ (மட்டு x).

(iii) $ac \equiv bc$ (மட்டு x).

(iv) $\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c}$ (மட்டு x); c ஆனது a, b-ஐ மீதியின்றி வகுக்கும். இங்கு c-ம் x-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாக இருத்தல் வேண்டும்.

தெரிப்பு :

(i) $a \equiv b$ (மட்டு x) ஆனால்

$a - b = kx$; அதேபோல்

$a_1 - b_1 = lx$ ஆகும்.

$$\therefore \quad (a-b) \pm (a_1 - b_1) = kx \pm lx$$

$$= (k \pm l)\, x$$

$$\therefore \quad (a \pm a_1) - (b \pm b_1) = (k \pm l)\, x$$

$\therefore \quad a \pm a_1 \equiv b \pm b_1$ (மட்டு x)

(ii) $a = b + kx, \quad a_1 = b_1 \quad lx$ ஆகும்.

$$\therefore \quad aa_1 = (b + kx)(b_1 + lx)$$

$$= bb_1 + kb_1x + lbx + klx^2$$

$$= bb_1 + M(x)$$

$\therefore\ aa_1 - bb_1 = M(x)$

$\therefore\ aa_1 - bb_1 \equiv 0$ (மட்டு x)

$aa_1 \equiv bb_1$ (மட்டு x)

(iii) $a = b + kx$

$\therefore\ ac = bc + (kc)\, x$

$ac - bc = M(x)$

$\therefore\ ac \equiv bc$ (மட்டு x)

(iv) $a \equiv b$ (மட்டு x)

$a - b = M(x)$

ஆனால் $a = kc,\ b = k'c$

$\therefore\ a - b = kc - k'c = c\,(k - k') = M(x)$

c - ம், x - ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்

$\therefore\ k - k'$, x ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்.

$\therefore\ \dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c} = M(x)$

$\dfrac{a}{c} \equiv \dfrac{b}{c}$ (மட்டு x)

4·25. தேற்றம் 14 :

$x \equiv r$ (மட்டு m) ஆனால் $f(x) \equiv f(r)$ (மட்டு m) ஆகும். [$f(x)$ ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை ஆகும்.]

தெரிப்பு :

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \dots \dots + a_n x^n$

$x \equiv r$ (மட்டு m) ஆனால்

$x = pm + r$

$$\therefore\ x^n = (pm+r)^n$$
$$= p^n m^n + {}^nC_1\, p^{n-1} m^{n-1} r + {}^nC_2\, p^{n-2} m^{n-2} r^2 + \dots + r^n$$
$$= M(m) + r^n$$

n-ன் மற்ற மதிப்புகளுக்கும் இது பொருந்தும்.

$$\therefore \quad f(x) = f(pm+r)$$
$$= a_0 + a_1(pm+r) + a_2(pm+r)^2 + \dots \dots + a_n(pm+r)^n.$$
$$= a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n + M(m)$$
$$= f(r) + M(m)$$
$$\therefore \quad f(x) = f(r) \text{ (மட்டு } m)$$

4·26. தேற்றம் 15 :

a, b ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானல் a, $2a$, $3a$ ... $(b-1)a$ ஐ b ஆல் வகுக்கும் போது வெவ்வேறு மீதிகள் வரும். அவைகள் எப்படி மாறி வரினும் 1, 2, 3, ... $(b-1)$-ல் தான் இருக்கும்.

தெரிப்பு :

முடியுமானல் ra, sa, $(r \neq s)$ என்ற இரண்டையும் b ஆல் வகுத்தால் இரண்டு எண்களுக்கும் மீதி k வரும் என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$ra - k = M(b)$$
$$sa - k = M(b) \text{ ஆகும்.}$$
$$\therefore \quad (r-s)a = M(b).$$

a-ம், b-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

r-ம், s-ம் b ஐ விட மிகச் சிறியவை.

$\therefore \quad (r-s)a = l \times b$ என்றால்

$$\left[\frac{r-s}{b}\right] a = l = \text{ ஒரு முழு எண் என வர வேண்டும்.}$$

அதாவது, $\frac{r-s}{b}$ என்பது ஒரு முழு எண்ணாக இருக்க வேண்டும். ஆனால் இது பொருந்தாது. ஏனெனில் $r - s < b$ ஆகும்.

ஆகையால், $\left(\frac{r-s}{b}\right)$ என்பது ஒரு முழு எண்ணாகாது.

$$\therefore \quad (r-s) \neq M(b).$$

$$\therefore \quad (r-s)a = M(b) \text{ என்பது பொருந்தாது.}$$

எனவே r_c, s_c என்பவற்றை b ஆல் வகுக்கும்போது ஒரே மீதி வரும் என்பது பொருந்தாது.

ஆகையால், r_c, s_c என்பவற்றை b ஆல் வகுத்தால் வெவ்வேறு மீதிகளே வரும்.

$\therefore$ $a, 2a, 3a \ldots (b-1)a$ ஐ b ஆல் வகுத்தால், $(b-1)$ எண்கள் மீதியாக வரும். அவைகள் ஒன்றுக்கொன்று வேறு பட்டவைகளேயாகும். அந்த $(b-1)$ எண்கள் எந்த வரிசையில் இருந்தாலும், அவைகள் $1, 2, 3 \ldots (b-1)$ ஆகத்தான் இருக்க வேண்டும்.

கிளைத் தேற்றம் :

a, b ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும். x ஏதாகிலும் ஓர் எண். $x, (x+a), (x+2a) \ldots x+(b-1)a$ ஐ b ஆல் வகுக்கும் போது $0, 1, 2, \ldots (b-1)$ என்ற எண்கள் மீதியாக, ஏதாகிலும் ஒரு வரிசையில் வரும்.

4.27 தேற்றம் 16 :

பெர்மாட் தேற்றம் (Fermat's Theorem) :

p ஒரு பகா எண். a-ம், p-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானால், $a^{p-1} \equiv 1$ (மட்டு p) ஆகும்.

தெரிப்பு :

தேற்றம் 15-லிருந்து $a, 2a, 3a, \ldots \ldots (p-1)a$ ஐ b ஆல் வகுத்தால் வெவ்வேறு மீதிகள் வரும். அவைகள் எந்த வரிசையில் வந்தாலும், $1, 2, 3 \ldots \ldots (p-1)$ என்பவைகளே ஆகும். இவற்றை $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_{p-1}$ எனக்கொண்டால், $r_1, r_2 \ldots \ldots r_{p-1}$ என்பவை ஏதேனும் ஒரு வரிசையில் $1, 2, 3 \ldots \ldots (p-1)$ ஆகும்.

$$\therefore \quad a \equiv r_1 \text{ (மட்டு } p)$$

$$2a \equiv r_2 \text{ (மட்டு } p)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$(p-1)a \equiv r_{p-1} \text{ (மட்டு } p)$$

$\therefore\ a \cdot 2a \cdot 3a \dots (p-1)a \equiv r_1 r_2 r_3 \dots r_{p-1}$ (மட்டு p)

அதாவது, $a^{p-1} \underline{|p-1} \equiv 1 . 2 . 3 \dots (p-1)$ (மட்டு p)

$a^{p-1} \underline{|p-1} \equiv \underline{|p-1}$ (மட்டு p)

$(a^{p-1}-1) \underline{|p-1} = M(p)$

p ஒரு பகா எண். $p > (p-1), (p-2), \dots 2, 1.$

$\therefore\ \underline{|p-1}$ ஐ p ஆல் வகுக்க முடியாது.

$\therefore\ (a^{p-1}-1) \underline{|p-1} \equiv 0$ (மட்டு p என்ற முற்றொருமையில் p ஆல் $\underline{|p-1}$ ஐ வகுக்க முடியாது. எனவே $(a^{p-1}-1)$-ஐ p ஆல் வகுக்க முடியும்.

$\therefore\ a^{p-1} - 1 \equiv 0$ (மட்டு p).

கிளைத்தேற்றம் 1 :

p ஒரு பகா எண். p-ம் a-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானால்,

$(a^p - a)$ ஐ p ஆல் மீதியின்றி வகுக்க முடியும்.

ஏனெனில் $a^p - a = a(a^{p-1}-1) = a\,M(p) = M(p)$ ஆகும்.

a-ம் p-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். இல்லாவிடில்,

$a = M(p).$

$\therefore\ a(a^{p-1}-1) = M(p).$

கிளைத்தேற்றம் 2 :

p ஒற்றைப்படை பகா எண். a-ம் p-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். எனில்,

$a^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv \pm 1$ (மட்டு p).

தெரிப்பு :

p ஒற்றைப்படை எண் ஆதலால்,

$$a^{p-1} - 1 = \left[a^{\frac{1}{2}(p-1)} - 1\right]\left[a^{\frac{1}{2}(p-1)} + 1\right]$$
$$= M(p).$$

p பகா எண்.

$\therefore \quad [a^{\frac{1}{2}(p-1)} - 1] = M(p)$

அல்லது $[a^{\frac{1}{2}(p-1)} + 1] = M(p)$

$\therefore \quad a^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv \pm 1 \quad M(p)$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$47^{7386} \equiv 11$ (மட்டு 19) என்று காட்டுக.

$7386 = 18 \times 410 + 6$

பெர்மாட் தேற்றம் மூலம்

$47^{19-1} \equiv 1$ (மட்டு 19)

$\therefore \quad 47^{18} \equiv 1$ (மட்டு 19) ஆகும்

$\therefore \quad 47^{7386} = 47^{18 \times 410 + 6}$

$= 47^{18 \times 410} . 47^{6}$

$\therefore \quad 47^{7386} \equiv 47^{6}$ (மட்டு 19) ... ... (1)

$47 \equiv 9$ (மட்டு 19)

$\therefore \quad 47^{6} \equiv 9^{6}$ (மட்டு 19) ... ... (2)

ஆனால் $9^{6} \equiv 11$ (மட்டு 19) ஆகும் ... ... (3)

$\therefore$ (1), (2), (3)-லிருந்து

$47^{7386} \equiv 11$ (மட்டு 19) ஆகும்.

4·28. தேற்றம் 17 :

ஆய்லர் பொதுமையாக்கிய பெர்மாட் தேற்றம். (Euler's Extension of Fermat's theorem)

m ஏதாவதொரு எண். a-ம் m-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். $a^{\phi(m)} \equiv 1$ (மட்டு m).

தெரிப்பு :

$1, \alpha, \beta, \gamma \ldots \ldots (m-1)$ என்ற $\phi(m)$ எண்கள் m உடன் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகவும், m ஐ விடச் சிறியன வாகவும் எடுத்துக்கொண்டால்,

$a, a\alpha, a\beta, a\gamma \ldots\ldots a\ (m-1)$ ஐ m ஆல் வகுத்தால் மீதி வெவ்வேறு எண்கள் வரும்.

முடியுமானால் ra, sa ஐ m ஆல் வகுக்கும்போது இரண்டிற்கும் மீதி k வருமாகில்

$$ra - sa = M(m)$$

$\therefore\ (r-s)\, a = M(m)$ ஆகும்.

இது பொருந்தாது. ஏனெனில் a-ம் m-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். a ஐ m ஆல் வகுக்க முடியாது. மேலும், r-ம், s-ம் m ஐ விடக் குறைவானவை. ஆகையால் $(r-s)$-ம் m ஐ விடக் குறைவானது. எனவே $(r-s)$ ஐயும் m ஆல் வகுக்க முடியாது.

$\therefore\ (r-s)\, a \neq M(m)$

எனவே γa, sa ஐ m ஆல் வகுத்தால் வெவ்வேறு மீதிகளே வரும். இம்மீதிகள் m உடன் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

எனவே $a, a\alpha, a\beta, a\gamma \ldots\ a\ (m-1)$ என்ற $\phi(m)$ எண்களை m ஆல் வகுக்கும் போது வரும் மீதிகள் m உடன் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாயும் வெவ்வேறு மதிப்புடையனவாயும் இருக்கும்.

எனவே இம்மீதிகள் ஏதாவது ஒரு வரிசையில் $1, \alpha, \beta \ldots\ldots (m-1)$ என்ற $\phi(m)$ எண்களாகும். $a, a\alpha, a\beta, \ldots a\,(m-1)$ என்பவற்றை m ஆல் வகுத்து வரும் மீதிகள் $r_1, r_2, r_3 \ldots r_{\phi m}$ எனக் கொண்டால் இவை ஏதேனும் ஒரு வரிசையில், $1, \alpha, \beta \ldots \ldots (m-1)$ ஆகும்.

$$a \equiv r_1 \ (\text{மட்டு } m)$$
$$a\alpha \equiv r_2 \ (\text{மட்டு } m)$$
$$a\beta = r_3 \ (\text{மட்டு } m)$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a(m-1) \equiv r_{\phi(m)} \ (\text{மட்டு } m)$$

$\therefore\ a.\, a\alpha.\, a\beta \ldots\ldots a(m-1) \equiv r_1\, r_2 \ldots\ldots\ldots r_{(\phi m)}$ (மட்டு m)

அதாவது $a.\, a\alpha,\, a\beta \ldots\ldots (m-1) \equiv 1.\ \alpha.\ \beta \ldots\ldots\ldots (m-1)$ (மட்டு m)

$\therefore\ a^{\phi(m)}\ (1.\ \alpha.\ \beta\ \ldots\ \overline{m-1}) \equiv 1.\ \alpha.\ \beta.\quad (m-1)$ (மட்டு m).

இரண்டு பக்கங்களையும் $1.\alpha.\beta\ \ldots\ (m-1)$ ஆல் வகுக்க,

$$a^{\phi(m)} \equiv 1\ (\text{மட்டு } m)$$

{ஏனெனில் $1, \alpha, \beta, \ldots$ இவை ஒவ்வொன்றும் m உடன் பகா எண்கள். $\therefore\ 1.\alpha.\beta\ \ldots\ (m-1)$, m உடன் பகா எண்.}

கிளைத்தேற்றம் :

m-ம், p-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானால் $\phi(m) = p-1$. எனவே $a^{p-1} \equiv 1$ (மட்டு p) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 11 :

x-ம், y-ம் 1365 ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

$x^{12} - y^{12} \equiv 0$ (மட்டு 1365) என்று நிறுவுக.

$1365 = 13 \times 7 \times 5 \times 3$.

x-ம், 1365-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

ஆகவே x-ம், 13-ம் கூட ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

$\therefore\ x^{12} \equiv 1$ (மட்டு 13) ... ... (1)

y-ம் 1365-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

$\therefore\ y^{12} \equiv 1$ (மட்டு 13) ... ... (2)

$\therefore\ (1) - (2)$

$\therefore\ x^{12} - y^{12} \equiv 0$ (மட்டு 13)... ... ... (3)

$x^{12} - y^{12} = (x^6 - y^6)(x^6 + y^6)$.

ஆனால், முன்போலவே,

$x^6 - y^6 \equiv 0$ (மட்டு 7) ஆகும்.

$\therefore\ x^{12} - y^{12} \equiv 0$ (மட்டு 7) ... ... (4)

$x^{12} - y^{12} = (x^4 - y^4)(x^8 + x^4 y^4 + y^8)$

$x^4 - y^4 \equiv 0$ (மட்டு 5) ... ... (5)

$\therefore \quad x^{12} - y^{12} \equiv (x^2 - y^2)(x^4 + x^2 y^2 + y^4)(x^6 + y^6).$

$\therefore \quad x^2 - y^2 \equiv 0$ (மட்டு 3) ... ... (6)

$\therefore$ (3), (4), (5), (6)-லிருந்து,

$x^{12} - y^{12} \equiv 0$ (மட்டு 1365).

எடுத்துக்காட்டு 12 :

8 ஆவது படியுள்ள எந்த எண்ணையும் $17m$ அல்லது $17m \pm 1$ என்ற அமைப்பில் எழுதலாம் என்று காட்டுக.

N என்ற ஏதாகிலும் ஓர் எண்ணை எடுத்துக் கொண்டால், N-ம் 17-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள் எனில்,

$\therefore \quad N^{16} \equiv 1$ (மட்டு 17)

$(N^8+1)(N^8-1) \equiv 0$ (மட்டு 17)

$\therefore \quad N^8+1 = M(17)$. அல்லது $N^8 - 1 = M(17)$

$\therefore \quad N^8 = 17m - 1$ அல்லது $N^8 = 17m + 1$ ஆகும்.

N-ம் 17-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாக இல்லாவிடில்

$N = M(17)$.

$\therefore \quad N^8 = 17m.$

$\therefore$ N^8ஐ $17m$ அல்லது $17m \pm 1$ என்ற அமைப்பில் எழுதலாம்.

4.29 வில்சன் தேற்றம் (Wilson's Theorem) 18 :

p ஒரு பகா எண்ணுயின் $\underline{|p-1} + 1 = M(p)$ ஆகும்.

தெரிப்பு :

a ஏதாகிலும் ஓர் எண்; p ஐ விடச் சிறியது. $a, 2a, 3a, \ldots\ldots$ $(p-1)a$ ஐ p ஆல் வகுக்கும்போது அவைகள் வெவ்வேறு எண்களை மீதிகளாகத் தரும். அவைகள் ஏதாகிலும் ஒரு வரிசையில் அமையும். ஆனுல் அவைகள் எந்த வரிசையில் அமைந்தாலும், 1, 2, 3, ... $(p-1)$ என்ற எண்களையே கொண்டிருக்கும்.

எனவே, a ஐ 1, 2, 3 ... $(p-1)$ என்ற ஏதோ ஓர் எண்ணால் பெருக்கி p ஆல் வகுத்தால் 1 மீதி வரும், எண்ணை $a \cdot b$ என்று எடுத்துக் கொள்ளுவோம்.

$$\therefore\ ab \equiv 1 \text{ (மட்டு } p).$$

$$ab - 1 = M(p).$$

இந்தக் கட்டுப்பாட்டில் எந்த நிலையில் $a = b$ எனப் பார்க்க வேண்டும்.

$$a^2 - 1 = M(p).$$

$$(a+1)(a-1) = M(p).$$

$a < p$ ஆகையால் $a - 1 = 0$ அல்லது $a + 1 = p$

$\therefore\ a = 1$ அல்லது $a = p - 1$ ஆகும். எனவே 1, $(p-1)$ என்பவற்றின் இருபடிகளே மட்டுமே p ஆல் வகுத்தால் 1 மீதியாக வரும்.

1, 2, 3, ... $(p-1)$ என்ற எண் வரிசையில் 1, $(p-1)$ ஐ விலக்கி 2, 3, 4, ... $(p-2)$ என்ற $(p-3)$ எண்களையும் சோடிகளாக, ஒவ்வொரு சோடியின் பெருக்குத் தொகையையும் p ஆல் வகுத்து வரும் மீதி 1 என வரும்படி பிரிக்கலாம்.

எனவே $2, 3, 4, \ldots (p-2) \equiv 1$ (மட்டு p)

$\therefore\ [2, 3, 4, \ldots (p-2)](p-1) \equiv (p-1)$ (மட்டு p)

$\therefore\ \underline{|p-1} \equiv -1$ (மட்டு p)

$\therefore\ \underline{|p-1} + 1 \equiv 0$ (மட்டு p)

4·30. மறுதலை :

$\underline{|n-1} + 1 = M(n)$ ஆனால் n ஒரு பகா எண்ணாகும்.

தெரிப்பு :

n ஒரு பகா எண்ணாக இல்லாவிடில் 1, 2, 3 ... $(n-1)$ என்ற ஏதாவதொரு எண்ணால் வகுபடக் கூடும். அப்படி வகுக்கக்கூடிய எண் $\underline{|n-1}$ ஐ மீதியின்றி வகுக்கும்.

$\therefore\ (\underline{|n-1} + 1)$ ஐ மீதியின்றி வகுக்காது.

ஆனால் $\lfloor n-1 + 1 = M(n)$. எனவே n-ன் எந்தக் காரணியினுலும் வகுபடும். ஆனால் இது பொருந்தாத முடிவாகையால் n ஒரு பகா எண் அல்ல என்பது பொருந்தாது. ஆகையால் n ஒரு பகா எண்ணுகவேதான் இருக்க முடியும்.

குறிப்பு :

$ab \equiv 1$ (மட்டு p) என்ற முற்றெருமையில் a, b என்ற இரண்டும் தொடர்புடைய எச்சங்கள் (associated residues) எனப்படும்.

4·31. தேற்றம் 19 :

பொதுமையாக்கிய வில்சன் தேற்றம் (Generalisation of Wilson's Theorem)

p ஒரு பகா எண்; $r < p$ ஆனுல் $\lfloor p-r \,.\, \lfloor r-1 + (-1)^{r-1} \equiv 0$ (மட்டு p).

தெரிப்பு :

$\lfloor p-1 + 1 = M(p)$ என்பதே வில்சன் தேற்றமாகும்.

$\therefore\ 1.2.3 \ldots (p-r)(p-\overline{r-1}) \ldots (p-1) + 1 = M(p)$.

$\therefore\ [1.2.3 \ldots (p-r)](p-\overline{r-1}) \ldots (p-1) \equiv -1$ (மட்டு p)

$(p-r)$ என்ற உறுப்பிற்குப் பின்பு p-ன் மடங்குகளை நீக்கினுல்,

$[1.2.3 \ldots (p-r)](-1)^{r-1} \lfloor r-1 \equiv -1$ (மட்டு p).

$\therefore\ \lfloor p-r \,.\, (-1)^{r-1} \,.\, \lfloor r-1 \equiv -1$ (மட்டு p).

$\lfloor p-r \,.\, \lfloor r-1 \equiv (-1)^r$ (மட்டு p).

$\therefore\ \lfloor p-r \,.\, \lfloor r-1 - (-1)^r = M(p)$.

$\lfloor p-r \,.\, \lfloor r-1 + (-1)^{r-1} = M(p)$.

கிளைத்தேற்றம் :

(i) $r-1 = p-r$ ஆனுல் ஒவ்வொன்றும்,

$$= \frac{1}{2}[(r-1) + (p-r)] = \frac{1}{2}(p-1)$$

$$\therefore\ \left\{ \lfloor \tfrac{1}{2}(p-1) \right\}^2 + (-1)^{+\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 0 \text{ (மட்டு } p)$$

(ii) $p = 4n+1$, ஆனால் $\frac{1}{2}(p-1) = 2n$.

$$\therefore \left\{ \underline{\left| \frac{1}{2}(p-1) \right.} \right\}^2 + 1 \equiv 0 \ (\text{மட்டு } p)$$

(iii) $p = 4n-1$ ஆனால் $\frac{1}{2}(p-1) = 2n-1$

$$\left\{ \underline{\left| \frac{1}{2}(p-1) \right.} \right\}^2 - 1 \equiv 0 \ (\text{மட்டு } p)$$

எடுத்துக்காட்டு 13 :

$(4n+1)$ ஒரு பகா எண் என்றால் $[\underline{|2n}]^2 + 1 = M(4n+1)$ என நிறுவுக.

$4n+1 = p$ என எடுத்துக் கொள்வோம். $(4n+1)$ ஒரு பகா எண். அதாவது p ஒரு பகா எண்.

$\therefore \underline{|p-1} + 1 = M(p)$ என்பது வில்சன் தேற்றம்.

எனவே, $\underline{|(4n+1)-1} + 1 = M(p)$.

$$\underline{|4n} + 1 = M(p).$$

$$\therefore [1.2.3 \ldots \ldots 2n.(2n+1)(2n+2)\ldots(2n+2n)] + 1 = M(p)$$

$$\therefore \underline{|2n}\ [(2n+1)(2n+2)\ldots\ldots(2n+2n)] + 1 = M(p) \quad \ldots \quad (A)$$

இங்கு, $2n+1 = [\overline{4n+1} - 2n] = (p-2n)$

$2n+2 = [\overline{4n+1} - \overline{2n-1}] = (p - \overline{2n-1})$

$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$

$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$

$2n+2n = [\overline{4n+1} - 1] = (p-1)$

எனவே, (A) ஆனது

$\underline{|2n}\ [(p-2n)(p-\overline{2n-1})\ldots\ldots(p-1)] + 1 = M(p)$

என வரும்.

p-ன் மடங்குகளை நீக்குவதால், நமக்கு

$\lfloor 2n \; [(-1)^{2n} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots 2n] + 1 = M(p)$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\lfloor 2n \cdot \lfloor 2n + 1 = M(p).$$

$$\therefore \; [\lfloor 2n]^2 + 1 = M(p).$$

அதாவது, $[\lfloor 2n]^2 + 1 = M(4n+1)$

4.32 தேற்றம் 20 :

இலக்ராஞ்சியின் தேற்றம் (Lagrange's Theorem).

p ஒரு பகா எண், r என்பது ஏதாவது ஓர் எண், $(p-1)$ ஐ விடக் குறைவானது என்றால்,

$$(x+1)(x+2) \ldots (x+p-1) = x^{p-1} + S_1 x^{p-2} + S_2 x^{p-3} + \ldots \ldots + S_{p-1}\text{-ல்}$$

$S_1, S_2, S_3, \ldots \ldots S_{p-1}$ ஒவ்வொன்றும் p ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்.

தெரிப்பு :

$f(x) = (x+1)(x+2) \ldots (x+\overline{p-1})$ ஆனால்

$f(x) = x^{p-1} + S_1 x^{p-2} + S_2 x^{p-3} + \ldots + S_{p-1}$

மேலும், $f(x)[x+p] \equiv (x+1) f(x+1)$

$$\therefore \; (x+p)(x^{p-1} + S_1 x^{p-2} + S_2 \ldots + S_{p-1})$$

$$\equiv (x+1)^p + S_1 (x+1)^{p-1} + S_2 \ldots \ldots + S_{p-1}(x+1) \quad \ldots \quad (I)$$

சமபடி கெழுக்களை இருபக்கங்களிலும் சமன் செய்தால்,

$$pS_1 = pC_2 + S_1 \, {}^{p-1}C_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$pS_2 = pC_3 + S_1 \, {}^{p-1}C_2 + S_2 \, {}^{p-2}C_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$pS_3 = pC_4 + S_1 \, {}^{p-1}C_3 + S_2 \, {}^{p-2}C_2 + S_3 \, {}^{p-3}C_1 \quad (3)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$pS_{p-2} = pC_{p-1} + S_1\,{}^{p-1}C_{p-2} + \dots + S_{p-2}\,{}^{2}C_1$$

(1)ல் இடக்கைப் புறம் $= pS_1$ ஐ p ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம். எனவே வலக்கைப் புறம் p ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம். p ஒரு பகா எண். எனவே pC_2 ஐ p ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம். எனவே, $S_1\,{}^{p-1}C_1$ ஐ p ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம். ஆனால் ${}^{p-1}C_1$-ம் p-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். எனவே S_1 ஐ p ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம்.

(2)-ல் இடக்கைப் புறம் p ஆல் வகுபடும். எனவே வலக்கைப் புறமும் p ஆல் வகுபடும். pC_3-ம் S_1-ம் p ஆல் வகுபடும். எனவே $S_2\cdot{}^{p-2}C_1$ ஐ p ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம். ஆனால் ${}^{p-2}C_1$, p பகா எண்கள். ஆகையால் S_2 ஆனது p ஆல் வகுபடும்.

இவ்வாறே $S_3, S_4 \dots S_{p-2}$-என்பவை p ஆல் வகுபடும் என்று நிறுவலாம்.

கிளைத்தேற்றம் :

(i) x^0-ன் கெழுவை I-லிருந்து இரு பக்கங்களிலும் சமன் செய்தால்,

$$pS_{p-1} = 1 + S_1 + S_2 + \dots + S_{p-2} + S_{p-1}$$

$$(p-1)\,S_{p-1} = 1 + S_1 + S_2 + \dots + S_{p-2}$$

ஆனால் $S_1, S_2, S_3 \dots S_{p-2}$ ஐ p ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம்.

$$\therefore\quad (p-1)\,S_{p-1} \equiv 1 \text{ (மட்டு } p).$$

$$-S_{p-1} + 1 \equiv 1 \text{ (மட்டு } p).$$

$$S_{p-1} + 1 \equiv 0 \text{ (மட்டு } p).$$

$$\therefore\quad \underline{|p-1} + 1 \equiv 0 \text{ (மட்டு } p).$$ (வில்சன் தேற்றம்.)

(ii) ஏதாவதொரு எண் x-ம், p-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானால், $(x+1)$, $(x+2) \dots (x+p-1)$ என்ற எண்களில் ஏதாவது ஓர் எண் p ஆல் வகுபடும்.

$$f(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+p-1) \text{ எனில்,}$$

$$f(x) \equiv 0 \text{ (மட்டு } p).$$

மேலும் $f(x) \equiv x^{p-1} + S_{p-1}$ (மட்டு p) ... ... (A)

$$\equiv x^{p-1} + \underline{|p-1}\ (\text{மட்டு } p)$$

$$\underline{|p-1} \equiv -1\ (\text{மட்டு}).$$

$$\therefore\ f(x) \equiv x^{p-1} - 1\ (\text{மட்டு } p). \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (B)$$

(A), (B)-லிருந்து,

$x^{p-1} - 1 \equiv 0$ (மட்டு p). (பெர்மாட் தேற்றம்)

பல்வேறு எடுத்துக்காட்டுகள் :

எடுத்துக்காட்டு 14 :

1000-க்குக் குறைவான பகா எண்கள் எத்தனை ?

$$1000 = 2^3 \cdot 5^3.$$

தேற்றம் 11 மூலம்,

1000 ஐ விடக் குறைவான பகா எண்களின் எண்ணிக்கை

$$= \phi(1000)$$

$$= 1000\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

$$= 1000 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = 400.$$

$$\therefore\ \phi(1000) = 400.$$

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$16^{99} - 1 = M(437)$ என்று நிறுவுக.

$437 = 19 \times 23$. இரண்டு எண்களும் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்,

$$\phi(437) = 437\left(1 - \frac{1}{19}\right)\left(1 - \frac{1}{23}\right)$$

$$= 437 \times \frac{18}{19} \times \frac{22}{23}$$

$$= 396.$$

$\therefore \; 16^{99} = (2^4)^{99} = 2^{396} = 2^{\phi(437)}$

$\therefore \; 2^{\phi(437)} - 1 \equiv 0$ (மட்டு 437) (தேற்றம் 17)

$\therefore \; 16^{99} - 1 = M(437)$

எடுத்துக்காட்டு 16 :

$\underline{|18} \equiv x$ (மட்டு 23) என்றால் x-ன் மதிப்பு என்ன ? 23 பகா எண் ஆதலால்,

$\underline{|22} \equiv (-1)$ (மட்டு 23)

அதாவது $\underline{|18} \,.\, 19 \,.\, 20 \,.\, 21 \,.\, 22 \equiv (-1)$ (மட்டு 23)

$\underline{|18}\,(23-4)(23-3)(23-2)(23-1) \equiv (-1)$ (மட்டு 23)

$\underline{|18}$ ஐ அடுத்து வரும் காரணிகளிலிருந்து 23-ன் மடங்குகளை நீக்கினல்,

$\underline{|18} \,.\, (1.2.3.4) \equiv (-1)$ (மட்டு 23)

$\underline{|18} \,.\, 24 \equiv (-1)$ (மட்டு 23).

$\underline{|18} \,.\, 24 + 1 = M(23)$

$\underline{|18} \,.\, 23 + \underline{|18} + 1 = M(23)$

$\therefore \; \underline{|18} + 1 = M(23)$

$\underline{|18} \equiv -1$ (மட்டு 23)

எனவே $x = -1$; பொதுவில் $x = 23m - 1$, m ஒரு முழு எண்.

எடுத்துக்காட்டு 17 :

$\underline{|28} + 233 = M(899)$ என்று நிறுவுக.

$899 = 29 \times 31$.

$\underline{|28} + 1 = M(29)$ (வில்சன் தேற்றம்)

$232 = 8 \times 29$, 29-ன் மடங்கைக் கூட்டுவதால்

$$|\underline{28} + 232 + 1 = M(29).$$

$$|\underline{28} + 233 = M(29). \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$|\underline{30} + 1 = M(31)$$

$$30 . 29 . |\underline{28} + 1 = M(31)$$

$$(-1)(-2)|\underline{28} + 1 = M(31)$$

$$2|\underline{28} + 1 = M(31)$$

31 ஐக் கூட்டினால்,

$$2|\underline{28} + 32 = M(31)$$

$$\therefore\ |\underline{28} + 16 = M(31)$$

$217 = 7 \times 31$, 31-ன் மடங்கைக் கூட்டினால்,

$$|\underline{28} + 217 + 16 = M(31)$$

$$\therefore\ |\underline{28} + 233 = M(31) \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2)-லிருந்து,

$$|\underline{28} + 233 = M(29 \times 31)$$

$$\therefore\ |\underline{28} + 233 = M(899)$$

எடுத்துக்காட்டு 18 :

$2^n + 1$ ஒரு பகா எண் எனில் n ஆனது 2-ன் படி என நிறுவுக.

n ஆனது 2-ன் படியாக இல்லாவிடில்

$n = 2^r N$ என்க. (N ஒற்றைப்படை எண்)

$$2^n + 1 = \left(2^{2^r}\right)^N + 1 = a^N + 1. \quad \text{இங்கு } a = 2^{2^r}$$

N ஒற்றைப்படை எண்ணாகையால் $a^N + 1$-க்கு $(a+1)$ என்ற காரணி உண்டு.

$\therefore$ (2^n+1)-க்கு $2^{2^r}+1$ என்ற காரணி உண்டு.

$2^{2^r}+1=1$ அல்லது 2^n+1; ஏனெனில் (2^n+1) ஒரு பகா எண்.

$\therefore$ $2^{2^r}+1=1$. $\therefore$ $2^{2^r}=0$. இது பொருந்தாது.

$\therefore$ $2^{2^r}+1=2^n+1$. $\therefore$ $n=2^r$ பொருந்தா முடிவு.

$\therefore$ 2^n+1 என்ற பகா எண்ணில் 'n', 2-ன் படியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 19 :

n என்ற பகா யெண் 13 ஐ விடப் பெரியதாக இருக்குமாகில் $n^{12}-1=M(65520)$ என்று நிரூபி.

$65520=13\times7\times5\times3^2\times2^4$.

$n^{12}\equiv1$ (மட்டு 13) (பெர்மாட் தேற்றம்) ... ... (1)

ஆனால் $n^{12}-1=(n^6-1)(n^6+1)$.

$n^6-1=0$ (மட்டு 7). ... ... (2)

$n^{\phi(9)}\equiv1$ (மட்டு 9).

$\phi(9)=6$ (1, 2, 4, 5, 7, 8 என்ற எண்கள் 9-ஐ விடச் சிறியவை ; 9 ஒடு ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்)

$\therefore$ $n^6\equiv1$ (மட்டு 9).

$\therefore$ $n^{12}\equiv1$ (மட்டு 9) ... ... (3)

$4m$, $4m+1$, $4m-1$, $4m+2$ என்ற அமைப்பில் n இருக்க வேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட எண் ஒரு பகா எண்; மேலும் 13 ஐ விடப் பெரியது. எனவே $4m\pm1$ என்ற அமைப்பில் இருக்க வேண்டும்,

$$n^2=(4m\pm1)^2=M(8)+1$$

$$n^4=[M(8)+1]^2=M(16)+1$$

$n^4 \equiv 1$ (மட்டு 16).

$n^{12}-1 = (n^4-1)(n^8+n^4+1)$.

$\therefore\ n^{12} \equiv 1$ (மட்டு 16). ... ... (4)

மேலும் $n^4 \equiv 1$ (மட்டு 5)

$n^{12} \equiv 1$ (மட்டு 9) ... ... (5)

$\therefore$ (1), (2), (3), (4), (5)-லிருந்து

$n^{12} \equiv 1$ (மட்டு 6552ப).

எடுத்துக்காட்டு 20 :

n ஒற்றைப்படை எண். $(n^2+3)(n^2+7) = M(32)$ என நிறுவுக.

$\phi(4) = 2$.

$\therefore\ n^{\phi(4)} \equiv 1$ (மட்டு 4)

$\therefore\ n^2 - 1 = M(4)$.

$n^2 - 1 + 4 = M(4)$.

$\therefore\ n^2 + 3 = M(4)$ ... ... (1)

அதேபோல், $\phi(8) = 4$.

$\therefore\ n^{\phi(8)} \equiv 1$ (மட்டு 8).

$n^{\phi(8)} - 1 = M(8)$.

$n^4 - 1 = M(8)$.

$(n^2+1)(n^2-1) = M(8)$.

$n^2+1 = n^2+3-2 = M(4)-2$: 8 ஆல் வகுபடாது.

$\therefore\ n^2-1 = M(8)$.

$n^2-1+8 = M(8)$

$n^2+7 = M(8)$. ... ... (2)

(1), (2) லிருந்து,

$$(n^2+3)(n^2+7) = M(32).$$

எடுத்துக்காட்டு 21 :

n ஒரு பகாயெண், n, m ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

$m^{n-1} + n^{m-1} - 1 = M(mn)$ என நிறுவுக.

n ஒரு பகாயெண். $\therefore\ \phi(n) = (n-1)$

m, n ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

$\therefore\ m^{n-1} - 1 = M(n)$ (பெர்மாட் தேற்றம்)

$\therefore\ n^{m-1} + m^{n-1} - 1 = M(n)$ ... ... (1)

$n^{m-1} - 1 = M(m)$ (பெர்மாட் தேற்றம்)

$\therefore\ m^{n-1} + n^{m-1} - 1 = M(m)$ ... ... (2)

(1), (2)-லிருந்து

$$m^{n-1} + n^{m-1} - 1 = M(mn).$$

எடுத்துக்காட்டு 22 :

p ஒரு பகா எண். $2\,\underline{|p-3} + 1 = M(p)$ எனக் காண்க.

p ஒரு பகா எண். $\therefore\ \underline{|p-1} + 1 = M(p)$

$(p-1)(p-2)\,\underline{|p-3} + 1 = M(p).$

$\underline{|p-3}\,[M(p) + 2] + 1 = M(p).$

$2\,\underline{|p-3} + 1 + M(p).$

எடுத்துக்காட்டு 23 :

$3^{2n} + 24n - 1 \equiv 0$ (மட்டு 32) என்று தொடர்ச்சி முறையிலோ அல்லது வேறு முறையிலோ நிரூபிக்க.

$f(n) \quad = 3^{2n} + 24n - 1$ ஆனால்

$$f(n+1) = 3^{2(n+1)} + 24(n+1) - 1$$
$$= 3^{2n+2} + 24(n+1) - 1$$
$$= 3^{2n+2} + 24n + 23.$$

$$f(n+1) - 9f(n) = 24n(1-9) + 32$$
$$= 32 - 192n$$
$$= M(32).$$

அதாவது $f(n+1) = 9f(n) + M(32)$

ஆகவே, $f(n)$ ஆனது 32-ன் மடங்கு எனில், $f(n+1)$-ம் 32-ன் மடங்காகும்.

இப்பொழுது $f(1) = 3^2 + 24 - 1 = 32$

$$f(2) = 3^4 + 24.2 - 1$$
$$= 128 = M(32).$$

... ...

... ...

எனவே $f(n) = 3^{2n} + 24n - 1 = M(32).$

எடுத்துக்காட்டு 24 :

$\underline{|2^r - 1}$ -ல் 2 என்ற பகா எண்ணின் மிகப் பெரிய படி யாது?

$$I_1 = I\left(\frac{2^r - 1}{2}\right) = 2^{r-1} - 1 \qquad \text{(தேற்றம் 8)}$$

$$I_2 = I\left(\frac{2^r - 1}{2^2}\right) = 2^{r-2} - 1$$

... ...

... ...

$$I_{r-1} = I\left(\frac{2^r - 1}{2^{r-1}}\right) = 2^1 - 1$$

$\therefore$ $\underline{|2^r - 1}$ -ல் 2 தோன்றும் மிகப் பெரிய படி

$$= I_1 + I_2 + I_3 \ldots I_{r-1}$$
$$= [2^{r-1} + 2^{r-2} + \ldots 2^1] - (r-1)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{2^{r-1} - 1}{2 - 1}\right) - r + 1$$

$$= 2(2^{r-1} - 1) - r + 1$$

$$= 2^r - r - 1$$

எடுத்துக்காட்டு 25 :

$3^{4n+2} + 5^{2n+1} = M(14)$ என்று காட்டுக.

தொடர்ச்சி முறையில் இதை நிரூபிக்கலாம்.

$f(n) = 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்.

$$f(n+1) = 3^{4(n+1)+2} + 5^{2(n+1)+1}$$

$$= 3^{4n+6} + 5^{2n+3}$$

$$\therefore \quad f(n+1) - 25\, f(n)$$

$$= 3^{4n+2}\,(3^4 - 5^2)\; 3^{4n+2}.56$$

$$= M(56)$$

$$= M(14).$$

$$\therefore \quad f(n+1) = 25\, f(n) + M(14)$$

ஆகவே $f(n)$ ஆனது 14-ன் மடங்கு எனில், $f(n+1)$-ம் 14-ன் மடங்காகும்.

$$f(1) + 3^6 + 5^3 = 729 + 125 = 854 = M(14)$$

... ...

ஆகவே தொகுமுறைப்படி

$$f(n) = 3^{4n+2} + 5^{2n+1} = M(14)$$

எடுத்துக்காட்டு 26 :

n ஒரு பகா எண். n-ம் N-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள் $N^{n^3-n^2} - 1 = M(n^3)$ ஆகும்.

n ஒரு பகா எண்.

$$N^{n-1} - 1 = M(n) \qquad \text{(பெர்மாட் தேற்றம்)}$$

$$\therefore \ N^{n-1} = 1 + M(n)$$

$$[N^{n-1}]^n = [1 + M(n)]^n$$

$$N^{n^2-n} = 1 + n\,M(n) + \frac{n(n-1)}{1.2}[M(n)]^2 + \dots + [M(n)]^n$$

$$= 1 + M(n^2)$$

$$[N^{n^2-n}]^n = [1 + M(n^2)]^n$$

$$N^{n^3-n^2} = 1 + n\,M(n^2) + n(n-1)[M(n^2)]^2 + \dots + [M(n^2)]^n$$

$$= 1 + M(n^3)$$

$$\therefore \ N^{n^3-n^2} - 1 = M(n^3).$$

எடுத்துக்காட்டு 27 :

ஏதாவது ஓர் எண் 'N' படி 12 ஆனால் அந்த எண் $13n$ அல்லது $13n+1$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

'N' என்ற எண் 13-ன் மடங்காகவோ அல்லது 13 ஒடு பகா எண்ணாகவோ இருக்கும்.

N, 13-ன் மடங்காயின், $N^{12} = M(13)$.

$$\therefore \ N^{12} = 13n \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

அல்லது $N^{12} - 1 = M(13)$ (பெர்மாட் தேற்றம்)

$$\therefore \ N^{12} - 1 = 13n.$$

$$\therefore \ N^{12} = 13n + 1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

(1), (2)-லிருந்து,

$N^{12} = 13n$ அல்லது $13n+1$

பயிற்சி 4

1. கீழ்வரும் எண்களைப் பகா எண்களின் பெருக்குத் தொகையாகக் காண்பி.

   (i) 9450 (ii) 29645 (iii) 4536 (iv) 15435

2. 360; 4116 என்பவற்றை மீதியின்றி வகுக்கக்கூடிய எண்கள் எத்தனை? அவைகளின் கூட்டுத் தொகை என்ன?

3. (i) 36000 (ii) 810000 (iii) 5145000-இவற்றை மீதியின்றி வகுக்கக்கூடிய எண்கள் எத்தனை? அவைகளின் கூட்டுத் தொகை என்ன?

4. 1845-ஐ மீதியின்றி வகுக்கக்கூடிய எண்கள் எத்தனை?

5. $\underline{|900}$-ல் 7-ன் மிகப் பெரிய படி என்ன?

6. $126 \cdot 127 \cdot 128 \ldots 1000$-ல் 11-ன் மிகப் பெரிய படி என்ன?

7. 2, 5, 7, 11, 13 என்ற எண்கள் எந்தப் படிகளில் (i) $\underline{|100}$ (ii) $\underline{|500}$-ல் தோன்றும்?

8. (i) $\underline{|60}$ (ii) $\underline{|101}$ (iii) $\underline{|256}$ என்ற எண்கள் எத்தனை பூச்சியங்களோடு முடிகின்றன?

9. $\phi(n)$ ஓர் இரட்டைப்படை எண் எனவும், n-க்குக் குறைவுராய் n ஒடு ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாயுள்ள எண்களின் கூட்டுத் தொகை $\frac{1}{2} n \times \phi(n)$ எனவும் நிறுவுக.

10. $\underline{|158}$ என்ற எண்ணில் 5 எந்தப் படியில் தோன்றும்?

11. $8^{n+1} - 7n + 41 = M(49)$ என நிறுவுக.

12. n ஒற்றைப்படை எண்ணாயின், $n^4 + 4n^2 + 11 = M(16)$ என நிறுவுக.

13. $7^{2n} + 16n - 1 = M(64)$ என நிறுவுக.

14. $3^{2n} - 8n - 1 = M(64)$ என நிறுவுக.

15. $3^{4n-2} + 8^{2n-1} \equiv 0$ (மட்டு 17) என நிறுவுக.

16. $2^{2n+1} + 1 = M(3)$ என நிறுவுக.

17. n ஓர் ஒற்றைப்படை எண்ணுயின் $n(n^2-1) = M(24)$ என நிறுவுக.

18. $3^{2n+1} + 2^{n+2} = M(7)$ என நிறுவுக.

19. $2^{2n} - 3n - 1 = M(9)$ என நிறுவுக.

20. $n(n^2 - 1)(29n^2 + 4) = M(120)$ என நிறுவுக.

21. $n^5 - n = M(30)$ என நிறுவுக.

22. 8, 7, 6, 5 ஆல் வகுத்தால் முறையே 5, 4, 3, 2 மீதி வரும் மிகச் சிறிய எண்களைக் காண்க.

23. 6, 5, 4, 3 ஆல் வகுத்தால் முறையே 5, 4, 3, 2 மீதி வரும் மிகச் சிறிய எண்களைக் காண்க.

24. 3, 5, 7 ஆல் வகுத்தால் முறையே 2, 3, 2 மீதி வரும், மிகச் சிறிய இரண்டு எண்களைக் காண்க.

25. 2, 3, 4, 5, 6 ஆல் வகுத்தால் 1 மீதி வரும். 7-ன் மடங்கான எண்ணைக் காண்க.

26. 2^{46} ஐ 47 ஆல் வகுத்தால் மீதி என்ன ?

27. 2^{100} ஐ 17 ஆல் வகுத்தால் மீதி என்ன ?

28. (1) 7^{120}, (2) 8^{130}, (3) 3^{100} ஐ முறையே 127; 131; 101 ஆல் வகுத்தால் மீதி என்ன ?

29. (i) $2^{23} \equiv 1$ (மட்டு 47) (ii) $2^{43} \equiv 1$ (மட்டு 314) என நிறுவுக.

30. 2^{400} ஐ 47 ஆல் வகுத்தால் மீதி என்ன ?

31. ஓர் எண்ணின் படி 3 ஆக இருப்பின், அந்த எண் $7m$, அல்லது $7m \pm 1$ என்ற அமைப்பிலிருக்குமென நிறுவுக.

32. ஓர் எண்ணின் படி 11 ஆக இருப்பின், அந்த எண் $23m$ அல்லது $23m \pm 1$ என்ற அமைப்பிலிருக்குமென நிறுவுக.

33. $x^5 - x = M(30)$ என நிறுவுக.

34. x, y, z என்பன அடுத்தடுத்த எண்களானல் (Consecutive integers) $(\Sigma x)^3 - 3\Sigma x^3 = M(108)$ என நிறுவுக.

35. $x^4 - 1 = M(5)$ என நிறுவுக.

36. 30 எண்களால் வகுபடக் கூடிய மிகச் சிறிய எண் காண்க.

37. 15 எண்களால் வகுபடக் கூடிய மிகச் சிறிய எண் காண்க.

38. 20 எண்களால் வகுபடக் கூடிய மிகச் சிறிய எண் காண்க.

39. $n > 7$ என்ற பகா எண்ணுயின் $n^6 - 1 = M(504)$ என நிறுவுக.

40. $n^7 - n = M(42)$ என நிறுவுக.

41. 7 ஐத் தவிர $n > 2$ என்ற பகா எண்ணுயின் $n^6 - 1 = M(56)$ என நிறுவுக.

பின் கொடுக்கப்பட்ட முடிவுகளை நிறுவுக :

42. $\underline{|10} - 32 = M(143)$

43. $\underline{|36} + 1037 = M(1517)$

44. $\underline{|712} + 1 \equiv 0$ (மட்டு 719)

45. $(2n+1)$ ஒரு பகா எண்ணுயின்,

$$(\underline{|n})^2 \equiv (-1)^{n+1} \text{ (மட்டு } 2n+1).$$

46. $N = a^x b^y c^z \ldots \ldots$ ஆனுல் ($a, b, c \ldots \ldots$ பகா எண்கள்) N-க்குக் குறைவாய் N ஒரு பகா எண்களாயிருக்கும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{N^2}{3}\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)$

$\left(1-\frac{1}{c}\right)$ ... ... எனவும், அவ்வெண்களின் கூட்டுத் தொகை $\frac{N^3}{3}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$ ...

$+ \frac{N}{6}(1-a)(1-b)(1-c)$ ... எனவும் நிறுவுக.

பயிற்சி 2

(1)

	தன்மை	கீழ்வரம்பு	மேல்வரம்பு	எல்லை
1.	ஓரியல்பான ஏறு தொடர்	0	$+\infty$	$+\infty$
2.	ஓரியல்பான இறங்கு தொடர்	0	$10\frac{2}{3}$	0
3.	அலை தொடர்	0	$+\infty$	இல்லை
4.	அலை தொடர்	1	8	இல்லை
5.	குவி தொடர்	1	$2\frac{1}{2}$	2
6.	விரி தொடர்	0	$+\infty$	$+\infty$
7.	ஓரியல்பான இறங்கு தொடர்	1	$3\frac{1}{3}$	1
8.	அலை தொடர்	-1	1	இல்லை

(2)

	தன்மை	எல்லை
1.	குவி தொடர்	1
2.	குவி தொடர்	1
3.	குவி தொடர்	1
4.	விரி தொடர்	
5.	சூனியத் தொடர்	

6. (i) 0 (ii) 0.

8. ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை.

9. $\frac{4}{3} \cdot a^{\frac{1}{3}}$

10. $\frac{a}{b}\, x^{a-b}$.

பயிற்சி 3 (a)

1. குவியும்
2. குவியும்
3. விரியும்
4. குவியும்
5. குவியும்
6. விரியும்
7. விரியும்
8. விரியும்
9. விரியும்
10. குவியும்
11. விரியும்
12. குவியும்
13. விரியும்
14. விரியும்
15. குவியும்
16. குவியும்
17. விரியும்
18. குவியும் $(p > \frac{1}{3})$
விரியும் $(p \leqslant \frac{1}{2})$
19. குவியும் $[(p+q) > 1]$
விரியும் $[(p+q) \leqslant 1]$
20. விரியும்
21. விரியும்
22. $x > 1$-க்குக் குவியும்
$x \leqslant 1$-க்கு விரியும்
23. $x < 1$-க்குக் குவியும்
$x \geqslant 1$-க்கு விரியும்.
24. குவியும்.
25. குவியும்.

பயிற்சி 3 (b)

1. விரியும்.
2. $|x| \leqslant 1$ (கு) $x > 1$ (வி) $x < -1$ (அ)
3. $|x| < 1$ (கு) $x \geqslant 1$ (வி) $x \leqslant -1$ (அ)
4. $p > 2$ (கு) $p \leqslant 2$ (வி)
5. $x \geqslant 1$ (கு) $x < 1$ (வி)
6. குவியும்.
7. $|x| < 1$ (கு) $|x| \geqslant 1$ (வி)
8. குவியும்
9. குவியும்
10. குவியும்
11. $|x| \leqslant 1$ (கு) $x > 1$ (வி) $x < -1$ (அ)

12. $-1 \leqslant x < 1$ (கு) $x > 1$ (வி) $x < -1$ (அ)

13. $|x| < 1$ (கு) $x \geqslant 1$ (வி) $x < -1$ (அ)

14. $-1 \leqslant x < 1$ (கு) $x \geqslant 1$ (வி) $x < -1$ (அ)

15. $|x| \leqslant 1$ (கு) $x > 1$ (வி) $x < -1$ (அ)

16. $|x| < 1$ (கு) $x \leqslant -1$ (வி) $x \geqslant 1$ (அ)

17. $|x| < 1$ (கு) $x \leqslant -1$ (வி) $x \leqslant -1$ (அ)

18. $|x| \leqslant 1$ (கு) $x > 1$ (வி) $x < -1$ (அ)

19. விரியும். 20. விரியும். 21. குவியும். 22. விரியும். 23. விரியும்.

24. $p > \frac{1}{2}$ (கு) $p \leqslant \frac{1}{2}$ (வி)

25. $x < 1$ (கு) $x \geqslant 1$ (வி)

26. $-1 \leqslant x < 1$ (கு) $x \geqslant 1$ (வி) $x < -1$ (அ)

27. (கு) 28. (கு) 29. (கு)

30. $|x| \leqslant 1$ (கு) $|x| > 1$ (வி)

பயிற்சி 4

1. (i) $2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$ (ii) $5 \times 7^2 \times 11^2$
   (iii) $2^3 \times 3^4 \times 7$ (iv) $3^2 \times 5 \times 7^3$
2. (i) 24; 1170 (ii) 24; 11200
3. (i) 72; 127764 (ii) 125; 2929531 (ii) 160; 18744000.
4. 12
5. 148
6. 86
7. 97; 24; 16; 9; 7
   494; 124; 82; 49; 40.
8. 14; 24; 63

10. 38

22. 337

23. 59

24. 23, 123

25. 301

26. 1

27. 16

28. 1, 1, 1

30. 1

36. 720

37. 144

38. 240.

கலைச் சொற்கள்

A

Abbreviation	—	குறுக்கம்
Abcissa	—	மட்டாயம், x - அச்சு ஆயத் தொலை
Absolute	—	அற, தனி
Absolute value	—	தனி மதிப்பு, மட்டு மதிப்பு
Abstract	—	அகநிலை, வெற்று
Abstract value	—	வெற்று மதிப்பு
Accurate	—	பிழையற்ற, மிகச் சரியான, திட்டமான
Ad infinitum	—	முடிவின்றி, கந்தழி வரை
Add	—	கூட்டு
Addend	—	கூட்டெண்
Addition	—	கூட்டல்
Adjacent	—	அடுத்த, அடுத்துள்ள
Admissible	—	ஏற்கத்தக்க
Aggregate	—	சேர்ப்புத் தொகை
Aggregation	—	சேர்ப்புக் கூட்டணி
Algebra	—	இயற்கணிதம்
Algebraic	—	இயற்கணித
Algebraic expression	—	இயற்கணித கோவை
Algebraic function	—	இயற்கணித சார்பு
Algebraic symbol	—	இயற்கணித குறி
Alternate	—	ஒன்றுவிட்ட, ஒன்றுவிட்டொன்று
Analysis	—	கணிதப் பகுப்பு முறை
Answer (n)	—	விடை
Answer (v)	—	விடை காண்க, விடை கூறு
Anticlockwise	—	இடஞ் சுழியாக, இடமாக
Antilogarithm	—	இனமடக்கை (இனமகை)
Apply	—	பயன்படுத்து, பொருத்து
Approximate	—	தோராயமான, அணித்தான, ஏறத்தாழ

Approximate solution	—	தோராயத் தீர்வு
Approximate value	—	தோராய மதிப்பு, அண்ணளவு
Approximately	—	தோராயமாக
Approximation	—	தோராயம்
Approximation successive	—	அடுத்தடுத்த தோராயம்
Arbitrary	—	யாதாமொரு, கட்டுப்பாடில்லாத
Argument (of a function)	—	சார்பின் மாறு எண்
Arithmetic	—	எண் கணிதம், எண் கணக்கு
Arithmetic continum	—	எண்ணியல் தொடரகம்
Array	—	வரிசை
As (: :)	—	போல (விகிதசமக் குறி)
Ascending	—	ஏறும், ஏறுகின்ற
Ascending order	—	ஏறு வரிசை
Associative law	—	சேர்ப்பு விதி, தொகுப்பு விதி
Average	—	சராசரி
Axiom	—	வெளிப்படை உண்மை
Axis	—	அச்சு, ஆயம்

B

Base	—	அடி
Base of a logarithm	—	மடக்கை அடி. மகை அடி
Binomial	—	ஈருறுப்பு
Binomial expansion	—	ஈருறுப்பு விரிவு
Binomial theorem	—	ஈருறுப்புத் தேற்றம்
Biquadratic	—	நாற்படிய
Biquadratic equation	—	நாற்படிச் சமன்பாடு
Bound	—	வரம்பு
Bound lower	—	கீழ் வரம்பு
Bound upper	—	மேல் வரம்பு
Bounded	—	வரம்புடைத்து
Bounded above	—	மேல் வரம்புடைத்து
Bounded below	—	கீழ் வரம்புடைத்து
Bounded function	—	வரம்புடைச் சார்பு
Boundless	—	வரம்பற்ற
Brackets	—	அடைப்புகள்
Brackets curved	—	பிறை அடைப்புகள் ( )
Brackets double	—	இரட்டை அடைப்புகள் { }
Brackets square	—	பகர அடைப்புகள், சதுர [ ] அடைப்புகள்

C

Calculate	—	கணக்கிடு
Calculation	—	கணக்கீடு, கணிப்பு
Cancel	—	நீக்கு
Case	—	வகை
Case general	—	பொது வகை
Case particular	—	குறிப்பிட்ட வகை
Case special	—	சிறப்பு வகை
Central	—	மையமான, நடுவான
Centre	—	மையம்
Characteristic (logarithm)	—	(மடக்கை) முழு எண்
Cipher	—	பூச்சியம்
Circle	—	வட்டம்
Clockwise	—	வலஞ்சுழியாக, வலமாக
Coefficient	—	கெழு
Coefficient binomial	—	ஈருறுப்புக் கெழு
Co-factor	—	இணைச்சினை
Co-factor of an element (determinant)	—	அணிக்கோவை மூலகத்தின் இணைச்சினை
Coincide	—	ஒன்றுபடு, பொருந்து
Coincident	—	ஒன்றிய, ஒன்றுபட்ட.
Coincident roots	—	சமத் தீர்வுகள், ஒன்றிய தீர்வுகள்
Column	—	நிரல்
Column in a determinant	—	அணிக்கோவையின் நிரல்
Combination	—	சேர்வு
Componendo	—	கூட்டல் விகித (தகவு) சமம் கூட்டுவிகித (தகவு) சமம்
Componendo et dividendo	—	கூட்டல் - கழித்தல் விகித (தகவு) சமம்
Composite	—	கலவை, தொகுப்பு, பகுநிலை
Composite number	—	தொகுப்பெண்
Compound	—	கூட்டு
Conclusion	—	முடிவு
Condensation	—	ஒடுக்கல்
Condensation test	—	ஒடுக்கற் சோதனை
Condensation test (Cauchy)	—	(கோசியின்) ஒடுக்கற்சோதனை
Condition	—	கட்டுப்பாடு, நிபந்தனை
Conditional	—	கட்டுப்பாட்டிற்குட்பட்ட, நிபந்தனைக்குட்பட்ட

Conditional equation — நிபந்தனைச் சமன்பாடு
Conditions, necessary and sufficient — வேண்டிய, போதிய நிபந்தனைகள்
Congruence — சர்வசமம்
Congruent — சர்வசமமுடைய
Conjucate — துணையிய, இணை
Conjucate algebraic numbers — துணையிய இயல் எண்கள்
Conjucate complex number — துணையிய சிக்கலெண்
Conjucate numbers — துணையிய எண்கள்
Conjucate roots — துணையிய தீர்வுகள்
Commensurable — பொது அளவுள்ள, அளவுக்கிணங்கிய
Common — பொதுவான
Common denominator — பொதுப் பகுவெண், புதுப் பின்னக் கீழெண்
Common difference — பொது வேறுபாடு
Common divisor — பொது வகுக்குமெண்
Common factor — பொதுச்சினை
Common fraction — பொதுப் பின்னம்
Common logarithm — பொது மடக்கை
Common measure — பொது அளவு
Common multiple — பொது மடங்கு
Common ratio — பொதுவிகிதம் (தகவு)
Commutative law — மாற்று விதி
Commutative law of addition — கூட்டற் பரிமாற்று விதி
Commutative law of multiplication — பெருக்கற் பரிமாற்று விதி
Companion series — துணைத்தொடர்
Compare — ஒப்பிடு
Comparison — ஒப்பீடு
Comparison test — ஒப்பீட்டுச் சோதனை
Completing the square — இருபடி நிறைவாக்கல், வர்க்க நிறைவாக்கல்
Complex — சிக்கலான, கலப்பு
Complex number — சிக்கலெண், கலப்பெண்
Complex quantity — சிக்கற் கணியம்
Consecutive — அடுத்தடுத்த, தொடர்ச்சியான
Consecutive numbers — அடுத்துவரும் எண்கள்
Consequent (ratio) — பின்னுறுப்பு

Consistency — இசைவு, பொருத்தமுடைமை
Consistency conditions for — இசைவு நிபந்தனைகள்
Consistency of equations — சமன்பாடுகளின் இசைவு நிலை
Consistent — இசைவுள்ள, பொருத்தமுள்ள
Constant — மாறிலி நிலை எண்
Construct — அமை, வரை
Construction — வனை வழி, வரைவுமுறை, அமைப்பு
Contiguous — அடுத்த
Continued fraction — தொடர் பின்னம்
Continued product — தொடர் பெருக்கம்
Continued proportion — தொடர் விகித சமம்
Continuity — தொடர்ச்சி
Continuous — தொடர்ச்சியான
Continuous at a point — ஒரு புள்ளியிலே தொடர்ச்சியான
Continuous curve — தொடர் வளையி, தொடர் வரை
Continuous function — தொடர்புடைச் சார்பு
Continuous in an interval — ஓர் இடையிலே தொடர்ச்சியான
Continuous variable — தொடர் மாறி
Contract (v) — சுருக்கு
Contraction — சுருக்கம்
Contradiction — முரண்பாடு, எதிர் மறுப்பு
Contradictory — முரண்பாடான, எதிர் மறையான
Convention — வழக்கு, மரபு
Converge — குவி, ஒருங்கு
Convergence — குவிதல், ஒருங்கல்
Convergence absolute — அறக்குவிதல்
Convergence conditional — நிபந்தனைக் குவிதல்
Convergence of a continued fraction — தொடர்பின்னக் குவிதல்
Convergence uniform — ஒரு சீராகக் குவிதல்
Convergent — குவியும், ஒருங்கும்
Convergent of a continued fraction — தொடர்பின்ன ஒருங்கி
Convergent penultimate — தொடர்பின்ன ஈற்றயல் ஒருங்கி
Convergent sequence — குவிதொடர் முறை
Convergent series — குவிதொடர்

Converse	—	மறுதலை
Conversely	—	மறுதலையாக
Conversion	—	மாற்றம்
Corollary	—	கிளைத்தேற்றம்
Correct	—	திருத்து, திருத்தமான
Correct to the first place of decimals	—	முதல் பதின் பகுப்புத் திருத்தமாக
Correct to the place of decimals	—	1வது பதின் பகுப்புத் திருத்தமாக
Corresponding	—	ஒத்த, ஒப்பிய
Counter-clockwise	—	இடஞ்சுழியாக, இடமாக
Cross multiplication	—	குறுக்குப் பெருக்கல்
Cube root	—	முப்படி மூலம்
Cubic	—	முப்படியான
Cubic equation	—	முப்படிச் சமன்பாடு
Cyclic	—	வட்டமான
Cyclic change	—	வட்ட மாற்றம்
Cyclic order	—	வட்ட வரிசை
Cyclic permutation	—	வட்ட வரிசை மாற்றம்

D

D'Alembert's ratio test	—	தாலம்பெயரின் விகிதச் சோதனை
Decimal	—	பதின் பகுப்பு
Decimal fraction	—	பதின் பகுப்பு பின்னம்
Decimal recurring	—	மடங்கு பதின் பகுப்பு
Decrease	—	குறைதல்
Dedekind cut	—	தெடிக்கண்டின் பாகுபாடு
Deduce	—	பகுத்தறி
Deduction	—	தள்ளுபடி, பகுத்தறிதல்
Define	—	வரையறு
Definite	—	வரையறுத்த
Definition	—	வரையறை
Denominator	—	பகு (க்கும்) எண், பின்னக் கீழெண்
Dense set	—	அடர் கணம்
Dense subset	—	அடர்கண உட்பகுதி
Dependent	—	சார்ந்த, சார்புடைய
Deranged series	—	ஒழுங்கு மாறிய தொடர்

Derived	—	வழிவந்த
Derived equation	—	வழிச்சமன்பாடு
Derived function	—	வழிச் சார்பு
Derived quantities	—	வழிக் கணியங்கள்
Derived set	—	வழிக் கணம்
Derived units	—	வழி அலகுகள்
Descarte's rule of sign	—	டேகார்ட்டின் குறி விதி
Descending order	—	இறங்கு வரிசை
,, series	—	இறங்கு தொடர்
Determinant	—	அணிக்கோவை
,, element of a	—	ஓர் அணிக்கோவையின் மூலகம்
Determinate	—	தேர்ந்த, தேரக்கூடிய
Difference	—	வேறுபாடு
,, common	—	பொது வேறுபாடு
,, mean	—	சராசரி வேறுபாடு
,, of first order	—	முதல் வரிசை வேறுபாடு
,, of n th order	—	n ஆவது வரிசை வேறுபாடு
Differential	—	வகையீடு
,, coefficient	—	வகைக்கெழு
Differentiate	—	வகைக்கெழு காண்
Differentiation	—	வகைக்கெழு காணல்
,, logarithmic	—	மடக்கை வகைக்கெழு காணல்
Digit	—	இலக்கம்
Dimension	—	வகையளவு
Direct proportion	—	நேர் விகித சமம்
Discontinuity	—	தொடர்ச்சியின்மை
Discontinuous	—	தொடர்ச்சியற்ற
,, function	—	தொடர்ச்சியற்ற சார்பு
Discriminant	—	தன்மை காட்டி
Distributive law	—	பங்கீட்டு விதி
Diverge	—	விரி
Divergent	—	விரிகின்ற, விரியும்
Divergent sequence	—	விரி தொடர் முறை
,, series	—	விரி தொடர்
Divide	—	வகு
Dividend	—	வகுபடும் எண்
Devidendo	—	கழித்தல் விகித சமம்
Divisibility	—	வகுபடு தன்மை
Division	—	வகுத்தல், பிரித்தல்

Division synthetic	—	தொகுமுறை வகுத்தல்
Divisor	—	வகுக்கும் எண்
Domain	—	(எண்) அரங்கம்
Double root	—	இரட்டைத் தீர்வு, இருமுறை மடங்குத் தீர்வு

E

Element	—	மூலகம், மூலக உறுப்பு
,, of a determinant	—	அணிக் கோவையின் மூலகம்
Eliminate	—	நீக்குரு, நீக்கற் பலன்
Eliminate	—	விலக்கு, நீக்கு
Elimination	—	விலக்கல், நீக்கல்
Equal	—	சமம், சமன்
,, in all respects	—	சர்வசமம்
Equate	—	சமன் செய், சமன்படுத்து
Equation	—	சமன்பாடு
,, algebraic	—	இயற்கணிதச்சமன்பாடு
,, binomial	—	ஈருறுப்புக்கெழுச் சமன்பாடு
,, biquadratic	—	நாற்படிச்சமன்பாடு
,, conditional	—	நிபந்தனைச் சமன்பாடு
,, cubic	—	முப்படிச் சமன்பாடு
,, homogeneous	—	ஒருபடித்தான சமன்பாடு
,, identical	—	சர்வ சமன்பாடு
,, indeterminate	—	தேராச் சமன்பாடு
,, linear	—	ஒருபடிச் சமன்பாடு
,, member of an	—	சமன்பாட்டு உறுப்பு
,, numercial	—	எண் தழுவிய சமன்பாடு
,, quadratic	—	இருபடிச் சமன்பாடு
,, reciprocal	—	நிகர மாற்றுச் சமன்பாடு, தலை கீழ்ச் சமன்பாடு
,, roots of an	—	சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் (மூலங்கள்)
,, simple	—	ஒருபடி, ஒரினச் [சமன்பாடு
Equations, Simultaneous	—	ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள்
Equation, Solution of an	—	சமன்பாட்டின் தீர்வு காணல்
,, transformation	—	சமன்பாட்டு மாற்றம், சமன் பாட்டு மாற்றமைப்பு
Equivalent	—	சமம்
Evaluate	—	மதிப்பிடு, மதிப்பு காண்

Even function	—	இரட்டைச் சார்பு
Even number	—	இரட்டைப்படை எண்
Exceptional case	—	விலக்கு வகை
Expand	—	விரி
Expansion	—	விரிவு
Explicit function	—	வெளிப்படைச் சார்பு
Exponent	—	படிக்குறி
Exponential function	—	படிக்குறிச் சார்பு
,, series	—	படிக் குறித் தொடர்
,, theorem	—	படிக்குறித் தேற்றம்
Expression	—	கோவை
,, binomial	—	ஈருறுப்புக்கோவை
,, irrational	—	அளவுக்கிணங்காத கோவை
,, linear	—	ஒருபடிக் கோவை
,, monomial	—	ஓருறுப்புக் கோவை
,, multinomial	—	பல்லுறுப்புக் கோவை
,, rational	—	அளவுக்கிணங்கிய கோவை
,, trinomial	—	மூவுறுப்புக் கோவை
Extend	—	விரிதல், நீட்டுதல்
Extension	—	விரிவு
Extremes (ratios)	—	ஈற்றுறுப்புகள், இறுதிகள், ஈறுகள்

F

Factor	—	சினை
,, common	—	பொதுச்சினை
,, highest common	—	பெரிய பொதுச் சினை, மீப்பெரு பொதுச் சினை, உத்தமப் பொது அளவு
,, prime	—	பாகச் சினை
Factorial	—	தொடர்ப் பெருக்கம்
,, n	—	(|n அல்லது n!)-n தொடர்ப் பெருக்கம், n படி வரிசைப் பெருக்கம்
Factorisation	—	சினை காணல்
Factorise	—	சினை காண்
Finite	—	முடிவுள்ள
,, series	—	முடிவுள்ள தொடர்
,, set	—	முடிவுள்ள கணம்
First approximation	—	முதல் தோராயம்

Formula	—	வாய்பாடு
Fourth proportional	—	விகித சம நான்காம் உறுப்பு
Fraction	—	பின்னம்
,, Continued	—	தொடர் பின்னம்
,, decimal	—	பதின் பகுப்புப் பின்னம், தசம பின்னம்
,, partial	—	பகுதிப் பின்னம்
Function	—	சார்பு

G

General	—	பொதுவான
Generalise	—	பொதுமைப்படுத்து, பொது விதி காண்
Generalisation	—	பொது விதி
General solution	—	பொதுத் தீர்வு
Generating function	—	பிறப்பிக்கும் சார்பு
Geometric mean	—	பெருக்கிடை
,, progression	—	பெருக்குத் தொடர்
,, series	—	பெருக்குத் தொடர்
,, ,, to infinity	—	கந்தழி வரை பெருக்குத் தொடர்
Graph	—	கோட்டுருவப் படம், வரை படம், கோட்டுப் படம்
Graphical solution (of an equation)	—	கோட்டுருவப் பட வழியான தீர்வு

H

Harmonic mean	—	இசை இடை
,, progression	—	இசைத் தொடர்
Homogeneous	—	ஒரு படித்தான
,, products	—	சம படிப் பெருக்கங்கள்

I

Identical	—	முழுதும் ஒத்த
Identity	—	முற்றொருமை
Illustration	—	எடுத்துக்காட்டு
Imaginary	—	கற்பனையான, மெய்யிலா
,, number	—	கற்பனை எண்
,, root	—	கற்பனைத் தீர்வு

Incommensurable	—	அளவுக்கிணங்காத, பொது அளவற்ற
Inconsistent	—	பொருந்தாத, முரணான
,, equations	—	பொருந்தாச் சமன்பாடுகள்
Indefinite	—	வரையறாத, அளவுபடாத
Independent	—	சார்பற்ற, சார்பிலாத
,, variable	—	சார்பில் மாறி
Indeterminate	—	தேரப்பெறாத, தேரா
,, quantity	—	தேராக் கணியம்
Index	—	படிக்குறி, குறி அட்டவணை
,, of a root	—	அடிக் குறி, மூலக் குறி
Inequality	—	சமனின்மை
Induction	—	உய்த்தறிதல்
,, mathematical	—	கணித முறை உய்த்தறிதல்
,, proof by	—	தொடர்முறைத் தெரிப்பு
Inference	—	தேற்றப்பாடு, முடிவு
Infinite	—	முடிவிலா
,, sequence	—	முடிவிலாத் தொடர் முறை கந்தழித் தொடர் முறை
,, series	—	முடிவிலாத் தொடர், கந்தழித் தொடர்
Infinity	—	கந்தழி
Integer	—	முழு எண்
,, positive	—	கூட்டு முழு எண்
,, negative	—	குறை முழு எண்
Inverse	—	நேர்மாறான
,, ratio	—	தலைகீழ்த் தகவு (விகிதம்)
Irrational	—	அளவுக்கிணங்காத
Is to (:)	—	தகவுக் குறி, விகிதக் குறி

K

Known quantity	—	தெரிந்த கணியம்

L

Like signs	—	ஒத்த குறிகள்
Like terms	—	ஒத்த உறுப்புகள்
Limit	—	எல்லை
Limit finite	—	திட்டமான எல்லை

Limit infinite — கந்தழி எல்லை
,, tends to a — எல்லையை அணுகுகிறது
எல்லையை நாடுகிறது
எல்லையை நெருங்குகிறது
,, does not tend to a finite — திட்டமான எல்லையை நெருங்கவில்லை
,, lower — கீழ் எல்லை
,, upper — மேல் எல்லை
Limits, within finite — திட்டமான எல்லைகளுக்குள் உள்ளது
Limited — எல்லைக்குட்பட்ட
Linear continum — கோட்டுத் தொடரகம்
Logarithm — மடக்கை (மகை)
,, common — பொது மடக்கை
,, Napierian — நேப்பியர் மடக்கை (மடக்கையடி e)
Logarithmic function — மடக்கைச் சார்பு
,, series — மடக்கைத் தொடர்
Lower bound — கீழ் வரம்பு

M

Mantissa — மடக்கைப் பின்னம்
Mathematics — கணிதம்
,, advanced — உயர் கணிதம்
,, applied — பயன்வழிக் கணிதம்
,, pure — தூய கணிதம்
Mathematical — கணிதத்திற்குரிய
,, induction — கணித முறை உய்த்தறிதல்
Maximum — மீப்பெரு
,, value — மீப்பெரு மதிப்பு
Mapping — உருமாற்றம், அமைப்பு மாற்றம்
Mean — சராசரி, இடை
,, arithmetic — கூட்டிடை
,, geometric — பெருக்கிடை
,, harmonic — இசைஇடை
Minimum — மீச்சிறு
Minimum value — மீச்சிறு மதிப்பு
Minor (of a determinant) — சீறி (அணிக் கோவை)
Minus — கழி, குறை, எதிர்
Minus sign — கழித்தற் குறி, குறைக் குறி

Modulus — மட்டு, தனி மதிப்பு
Monomial — ஓருறுப்பு, ஓருறுப்பிற்குரிய
Monotonic — ஓரியல்பான
,, decreasing function — ஓரியல்பாக இறங்கும் சார்பு
,, ,, sequence — ஓரியல்பான இறங்கும் தொடர்முறை
,, function — ஓரியல்புச் சார்பு
,, increasing function — ஓரியல்பாக ஏறும் சார்பு
,, increasing sequence — ஓரியல்பான ஏறும் தொடர்முறை
Multinomial — பல்லுறுப்புக்குரிய
,, expression — பல்லுறுப்புக் கோவை
,, theorem — பல்லுறுப்புத் தேற்றம்
Multiple — மடங்கு
Multiple, common — பொது மடங்கு
,, least common — அதமப் பொது மடங்கு (அ. பொ. ம.)
Multiplication — பெருக்கல்
Multiplicand — பெருக்கப்படும் எண்
Multiplier — பெருக்குமெண்
Multiply — பெருக்கு

N

Negative — குறை, எதிர்
,, number — குறை எண்
,, quantity — குறைக் கணியம்
,, sign — குறைத்தத் குறி
Notation — குறியீடு, குறியீட்டு முறை
,, abridged — சுருக்குக் குறியீடு
Number — எண்
,, abstract — வெற்றெண்
,, even — இரட்டை எண்
,, odd — ஒற்றையெண்
,, prime — பகாவெண்
,, relation — எண் தொடர்பு
,, whole — முழுவெண்
Numeration — எண்ணீடு
Numerator — மேலெண்
Numerical — எண்ணுலாகிய

O

One and only one root — ஒரே ஒரு தீர்வு
One to one correspondence — ஒன்றுக்கொன்றான ஒத்தியைபு
Open interval — திறந்த இடைவெளி
Open set — திறந்த கணம்
Order — வரிசை
Ordinate — குத்தாயம்
Origin — ஆய ஆதி

P

Pair — இணையான
Parabola — தொடுவளைவு
Particular — சிறப்பான
Partial — பகுதியான
Perimeter — சுற்றளவு
Permutation — வரிசை மாற்றம், அடுக்கு
Plus — கூட்டு
Plus-sign — கூட்டற் குறி
Point — புள்ளி
Position — இடம்
Positive — மிகை, கூட்டு
,, number = கூட்டெண்
,, quantity — கூட்டுக் கணியம்
Power — படி
Power series — வலுத் தொடர்
Principle — விதி
Problem — கணக்கு
Process — வழி, செய்முறை
Product — பெருக்குத் தொகை
Progression — தொடர்
,, arithmetic — கூட்டுத் தொடர்
,, geometric — பெருக்குத் தொடர்
,, harmonic — இசைத் தொடர்
Proof — தெரிப்பு, நிறுவல்
Proper part — சரியான பகுதி
Property — பண்பு
Proportion — விகிதசமம்
,, continued — தொடர் விகிதசமம்
,, direct — நேர் விகிதசமம்

Proportion inverse	— நேர்மாறு விகிதசமம்
Proportional	— விகிதசமமான
,, mean	— விகிதசம இடை

Q

Quadratic equation	— இருபடிச் சமன்பாடு
,, expression	— இருபடிக் கோவை
,, surd	— அளவுக்கிணங்காத இருபடி மூலம்
Quantity	— கணியம்
,, unknown	— தேராக் கணியம்
Quarter	— கால்
Quotient	— ஈவு

R

Radical	— படி மூலம், படி மூலமுடைய
Radius	— ஆரை
Rate	— வீதம்
Ratio	— விகிதம்
,, antecedent of a	— ஒரு விகிதத்தின் முன்னுறுப்பு
,, common	— பொது விகிதம்
,, constant	— மாறு விகிதம்
,, consequent of a	— ஒரு விகிதத்தின் பின்னுறுப்பு
,, direct	— நேர் விகிதம்
,, duplicate	— இருபடி விகிதம்
,, inverse	— நேர்மாறு விகிதம்
,, mean	— இடை விகிதம்
Recurring	— மடங்குகின்ற
,, continued fraction	— மடங்குத் தொடர் பின்னம்
,, series	— மடங்குத் தொடர்
Reductio ad absurdum	— பொருந்தா முடிவு
Relation	— தொடர்பு
Remainder	— மீதி, மிச்சம்
,, theorem	— மீதித் தேற்றம், மிச்சத் தேற்றம்
Represent	— குறி, வகை
Residue	— எச்சம்
Root	— தீர்வு
Root, Cube	— முப்படி மூலம்
imaginary	— கற்பனைத் தீர்வு

Root irrational — அளவுக்கிணங்காத் தீர்வு
Root rational — அளவுக்கிணங்கிய தீர்வு
Root real — மெய்யெண் தீர்வு
Root square — இருபடி மூலம்

S

Section — பகுப்பு
Sectional sequence — பகுப்புத் தொடர் முறை
Series — தொடர்
Series absolutely convergent — அறக்குவியும் தொடர்
Series arithmetic — கூட்டுத் தொடர்
Series ascending — ஏறு தொடர்
Series condionally convergent — நிபந்தனைக் குவி தொடர்
Series convergent — குவி தொடர்
Series descending — இறங்கு தொடர்
Series divergent — விரி தொடர்
Series exponential — படிக்குறித் தொடர்
Series geometrical — பெருக்குத் தொடர்
Series hormonical — இசைத் தொடர்
Series infinite — கந்தழித் தொடர், முடிவிலாத் தொடர்
Series logarithmic — மடக்கைத் தொடர்
Series oscillating — அலை தொடர்
Series power — வலுத் தொடர், அடுக்குத் தொடர்
Series recurring — மடங்குத் தொடர், மடங்கி வரும் தொடர்
Series summation — தொடர் கூட்டல்
Set algebra — கண இயற் கணிதம்
Set of points — புள்ளித் தொடை, புள்ளிக் கணம்
Sleve of Eratosthenes — ஏருற்றெத் தெனிசுவின் வடிதட்டு (எண் சல்லடை)
Sign — குறி
Simple — தனியான, ஒருபடியான, எளிய
Simple Continued fraction — சாமானியத் தொடர் பின்னம்
Simple equation — ஒருபடிச் சமன்பாடு
Simultaneous — ஒருங்கமை
Smooth Curve — மெல்லிழை வரை
Solution — தீர்வு

Solve	— தீர்வு காண்
Square	— சதுரம்
Square root	— வர்க்க மூலம்
Squared (x^2)	— இருபடி - x-ன்
Standard	— திட்டமான
Standard Form	— திட்ட அமைப்பு
Substitute	— ஈடு செய்
Subtract	— கழி
Sum	— கூட்டுத் தொகை, மொத்தம்
Sum algebraic	— இயற் கணித கூட்டுத் தொகை
Sum to infinity	— கத்தழிக் கூட்டுத் தொகை
Summation	— கூட்டல்
Symbol	— குறியிடு
Symmetric	— சமச்சீரான, சமச்சீருள்ள
Symmetric expression	— சமச்சீர் கோவை
Symmetry	— சமச்சீர்

T

Table	— அட்டவணை
Tend	— நோக்கு, அணுகு, நெருங்கு
Term	— உறுப்பு
Term absolute	— தனி உறுப்பு
Term negative	— குறை உறுப்பு
Term positive	— கூட்டு உறுப்பு
Test	— சோதனை
Test Cauchy's condensation	— கோசியின் ஒடுக்கற் சோதனை
Test D' Alembert's	— தாலம்பெயரின் சோதனை
Test of convergence	— குவி சோதனை, குவிதற் சோதனை ஒடுங்கற் சோதனை
Test of divergence	— விரி சோதனை, விரிதற் சோதனை
Theory	— கொள்கை
Theory of equation	— சமன்பாட்டுக் கொள்கை
Theory of numbers	— எண் கொள்கை, எண்ணியல்
Transformation	— மாற்றம், உருவ மாற்றம், நிலை மாற்றம்
Transformation of equation	— சமன்பாட்டு மாற்றம்
Transposition	— இட மாற்றம்

U

Undetemined	—	தேரா
Unit	—	அலகு
Unlike	—	ஒவ்வாத
Unlimited	—	எல்லையில்லாத

V

Value	—	மதிப்பு
Value indeterminate	—	தேர முடியாத மதிப்பு
Value limiting	—	எல்லை மதிப்பு
Value real	—	உண்மை மதிப்பு
Variable	—	மாறி
Variable dependent	—	சார்புடை மாறி
Variable independent	—	சார்பில் மாறி
Variate	—	மாறி
Variation	—	மாறல், மாறுபாடு
Verification	—	சரி பார்த்தல்
Verify	—	சரி பார்
Vinculum	—	தொகுப்புக் கோடு

W

Whole number	—	முழு எண்

X

X-axis	—	X - அச்சு

Y

Y-axis	—	Y - அச்சு

Z

Zero	—	பூச்சியம்